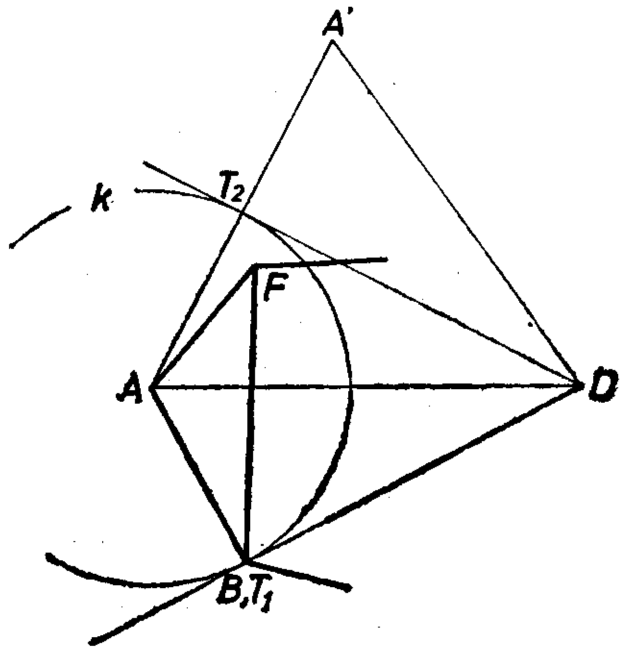
Ellentmondásra jutunk annak föltételezéséből, hogy az AD, BE, CF átlók mindegyike nagyobb 2-nél.

Legyen $AD > 2$, és rajzoljuk meg A körül az egységnyi sugarú k kört. Az A-val szomszédos B, F csúcsok benne vannak k-ban vagy éppen a kerületén, emiatt a BF szakasz D-ből vett látószöge nem lehet nagyobb, mint a D-ből k-hoz húzott érintők közti T_1DT_2 szög, ahol T_1, T_2 az érintési pontok.



1. ábra

Belátjuk, hogy

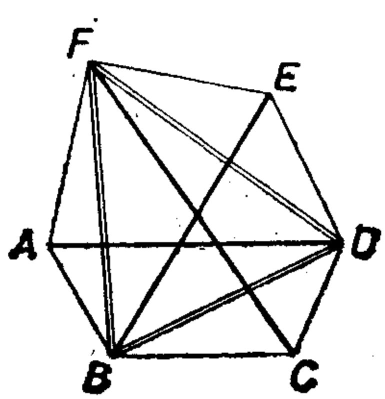
$$BDF\sphericalangle \leqq T_1DT_2\sphericalangle < 60^\circ.$$

Fordítsuk el az ADT_1 háromszöget D körül úgy, hogy T_1 essék egybe T_2-vel, és legyen ekkor A új helyzete A'. Az ADA' háromszögben $AD = A'D > 2$ és $AA' \leqq AT_2 + T_2A' = AT_2 + T_1A = 2 < AD$, ezért a háromszög D-nél levő szöge kisebb a másik kettőnél, amelyek egyenlők, tehát kisebb 60°-nál. Ámde

$$ADA'\sphericalangle = ADT_2\sphericalangle + T_2DA'\sphericalangle = ADT_2\sphericalangle + T_1DA\sphericalangle = T_1DT_2\sphericalangle,$$

állításunkat ezzel igazoltuk.

Ha mármost egyidejűen AD, EB és CF mindegyike nagyobb volna, mint 2 – vagyis mint konvex hatszögünk akármelyik oldalának a 2-szerese –, akkor meggondolásunkban D szerepét sorra B-nek, F-nek átadva – egyidejűen A szerepét a szemben levő csúcsnak –, azt kapnánk, hogy a BDF háromszög szögeinek összege kisebb 180°-nál, hiszen külön-külön mindegyik kisebb, mint 60°

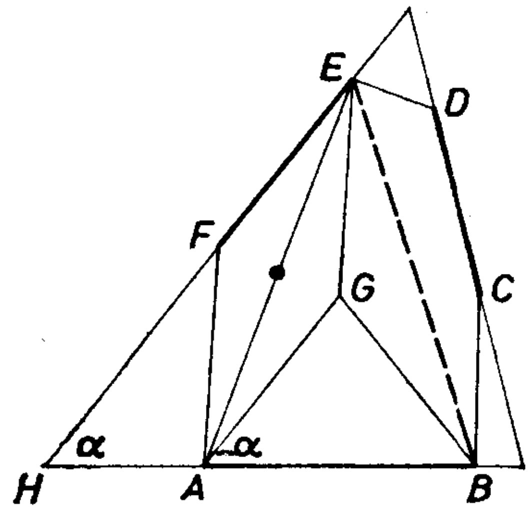


2. ábra

Ez az ellentmondás mutatja a feladat állításának helyességét.

Hetyei Gábor (Pécs, Leőwey K. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Tetszetős ötlet a 3. ábra szerinti hatszög minden második oldalát meghosszabbítani, és így egy háromszögbe belefoglalni az idomot, számos dolgozat ebből indult ki.

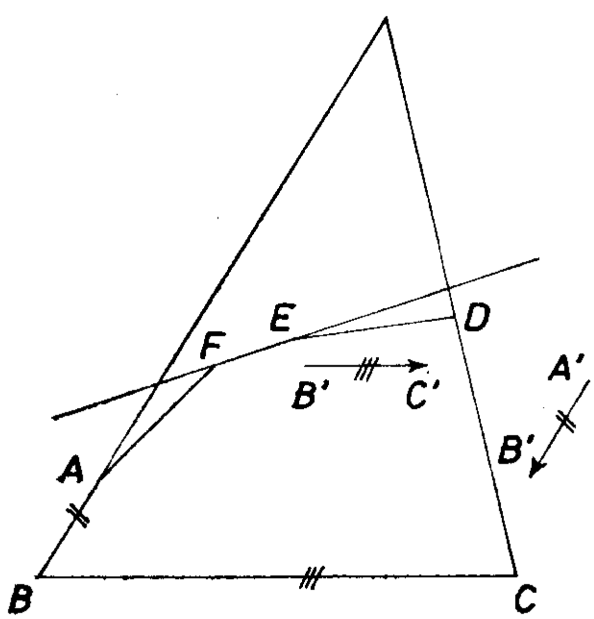


3. ábra

Kiválasztva a háromszög legkisebb szögét – vagy az ilyenek egyikét, ha több van, az ábrán $AHF\sphericalangle = \alpha$ ilyen –, erre $\alpha \leqq 60°$. Ekkor az AHF szög mindkét szárára rátámaszkodó BE átló nem hosszabb, mint 2 egység.

Tükrözzük F-et az AE szakasz felezőpontjára, legyen a képe G. Így egyrészt az $AFEG$ négyszög paralelogramma, másrészt $GAB\sphericalangle = FHA\sphericalangle = \alpha \leqq 60°$, tehát $EG = FA \leqq 1$, illetve az α-val szemben levő GB oldalnál van nagyobb az $AG = FE \leqq 1$ és $AB \leqq 1$ oldalak közt, ti. az, amelyikkel szemben α-nál nagyobb szög van ; esetleg $AG = AB = GB$. Eszerint $GB \leqq 1$, ennélfogva a GBE háromszögből $EB \leqq EG + GB \leqq 2$. Egyenlőség előfordulhat, ha a GBE háromszög elfajult, és egyidejűen a hatszög felhasznált két oldala éppen 1-gyel egyenlő. – Ezzel a feladat állítását *az ábrán fölvett hatszögre* bebizonyítottuk.

Könnyen kiegészítheti az olvasó a fentieket az olyan hatszögek vizsgálatával, amelyekben sem a 3. ábrabeli meghosszabbítások révén nem keletkezik befoglaló háromszög, sem a BC, DE, FA oldalhármas használatával. Ha ugyanis pl. az AB félegyenes irányát a CD félegyenes irányába átvivő forgás (a BC irányán át gondoljuk) szöge éppen 180° vagy több is annál, akkor a fenti háromszög 2 oldalegyenese párhuzamos, vagy pedig az EF oldalával *kívülről* támaszkodik a hatszög a létrejövő háromszög egyik oldalához. És egyidejűleg az is fennállhat, hogy a BC félegyenest a DE irányába legalább 180°-nyi elfordulás viszi át (4. ábra). – Ebből a két „sikertelenségből" levont következtetésekkel lehet bizonyítani az állítást a szóban forgó átlók valamelyikére. (Vagyis „megfoltozni" az eddig hiányos bizonyítást.)



4. ábra

2. Versenybizottságokban gyakran elhangzik ilyen bírálat: nem teljes, de könnyen kiegészíthető teljessé. Ezt a keveset azonban – amilyenre példa az előbbi megjegyzés – csak akkor toldják hozzá a versenyző munkájához, ha van nyoma annak, hogy érezte az illető: valami még hátra van. Más szóval, ha nem tekintette befejezettnek a bizonyítást abban a hiányos állapotban.

3. Még egy tanulság a 3. ábrához: ne csak egy ábrát rajzoljunk, és ne csak alig-alig eltérőt valami szabályostól, mert az ilyesmi nem szerénység, hanem szűklátókörűség!