Első nap

1. feladat. Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amelyre minden egész a, b esetén teljesül
$$f(2a) + 2f(b) = f\big(f(a+b)\big).$$

2. feladat. Az ABC háromszögben A_1 a BC oldalon, B_1 pedig az AC oldalon fekszik. Legyenek P és Q rendre az AA_1 és BB_1 szakaszok olyan pontjai, amelyekre PQ párhuzamos AB-vel. Legyen P_1 a PB_1 egyenes egy olyan pontja, amire B_1 a PP_1 szakasz belsejében fekszik, és $PP_1C\sphericalangle = BAC\sphericalangle$. Hasonlóan legyen Q_1 a QA_1 egyenes egy olyan pontja, amire A_1 a QQ_1 szakasz belsejében fekszik, és $CQ_1Q\sphericalangle = CBA\sphericalangle$.

Bizonyítsuk be, hogy a P, Q, P_1, Q_1 pontok egy körön fekszenek.

3. feladat. Egy szociális hálózatnak 2019 tagja van, közülük némely párok barátai egymásnak. Ha A barátja B-nek, akkor B is barátja A-nak. A következő típusú esemény előfordulhat többször egymás után, egy időben mindig csak egy ilyen esemény történik:

> Ha A, B, C olyanok, hogy A barátja B-nek is és C-nek is, de B nem barátja C-nek, akkor barátságot változtathatnak úgy, hogy B és C most már barátai egymásnak, A és B, valamint A és C barátsága viszont megszűnik. Az összes többi barátság változatlan marad.

Kezdetben 1010 olyan tag van, amelyek mindegyikének pontosan 1009 barátja van, és 1009 olyan tag, amelyek mindegyikének pontosan 1010 barátja van. Bizonyítsuk be, hogy létezik a fenti típusú eseményeknek egy olyan sorozata, amelyek végén minden tagnak legfeljebb egy másik tag a barátja.

Második nap

4. feladat. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (k,n) számpárt, amire
$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots\big(2^n-2^{n-1}\big).$$

5. feladat. Bath Bankja érméket bocsát ki, melyeknek egyik oldalán H, másik oldalán T betű látható. Harrynek n ilyen érméje van, amelyek előtte balról jobbra, egy sorban vannak elrendezve. Harry ismételten végrehajtja a következő műveletet: ha pontosan $k>0$ olyan érme van, amin H van felül, akkor megfordítja a balról k-adik érmét; máskülönben minden érmén T van felül, és ekkor Harry megáll. Például $n=3$ esetén a THT sorozatból indulva $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ a lépések sorozata, ami három lépés után megáll.

(a) Bizonyítsuk be, hogy bármi legyen is a kiindulási sorozat, Harry véges sok lépés után megáll.

(b) Minden C kiindulási sorozatra jelölje $L(C)$ azt a lépésszámot, ahány lépés után Harry megáll. Például $L(THT)=3$ és $L(TTT)=0$. Határozzuk meg $L(C)$ átlagos értékét, amint C végigfut a 2^n lehetséges kiinduló sorozaton.

6. feladat. A hegyesszögű ABC háromszög, amiben $AB \neq AC$, beírt körének a középpontja I. Az ABC háromszög ω beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. A D-ből EF-re bocsátott merőleges egyenes és az ω kör második metszéspontja R. Az AR egyenes és az ω kör második metszésponta P. A PCE és a PBF háromszögek körülírt köreinek második metszéspontja Q.

Bizonyítsuk be, hogy a DI és PQ egyenesek az AI-ra A-ban állított merőleges egyenesen metszik egymást.