Kapacitások összetett rendszerekben

Bevezetés

Idézzünk fel két ismert példát! Az első a síkkondenzátor, melynek a kapacitása (ha a fegyverzetek felülete A, a távolságuk d, és ez elég kicsiny)

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{1}$$

Ez a mennyiség az egyik fegyverzetről a másikra átvitt Q töltés és a töltésátvitel hatására kialakuló U feszültség közötti összefüggést adja meg:

$$Q = CU. \tag{2}$$

Másik példánk egy, a térben mindentől távol lévő, önmagában álló, R sugarú vezető gömb, amely esetében

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R, \tag{3}$$

és ez a gömbre (valahonnan) felvitt töltés és a végtelenhez (mint nullához) viszonyított feszültség közötti arányossági tényező.

A kétféle kapacitásfogalom nagyon hasonló, amennyiben egy feszültség (illetve potenciál) és az annak létrehozásához szükséges töltés között teremt kapcsolatot, de azt is látjuk, hogy nem teljesen azonos, hisz az egyikben csak egy vezető test, míg a másikban az elektromos megosztás útján kapcsolatban lévő két test együttes tulajdonságáról van szó. Az alábbiakban a kapacitás fogalmának egy általánosabb tárgyalását adjuk, amelyben mindkét kapacitásértelmezés természetes módon jelenik meg.

Töltések és potenciálok

Az egyszerűség kedvéért egy olyan esetet vizsgálunk, amelyben csak két (F_1-gyel és F_2-vel jelölt) fémtest (ún. fegyverzet) helyezkedik el a térben, de a megfontolásaink általánosíthatók akárhány fegyverzetre. Arra vagyunk kíváncsiak, milyen összefüggés van az egyes testekre felvitt töltés és a rajtuk kialakuló potenciál között. Először azt gondoljuk meg, mi történik, ha csak az F_1 fémre viszünk fel töltést! Tudjuk, hogy a statikus esetben a töltések úgy oszlanak el a fémek felületén, hogy azok ekvipotenciális felületek legyenek, másképp mondva: úgy, hogy a töltésekből kiinduló elektromos tér erővonalai a fémek felületéről merőlegesen induljanak ki, illetve merőlegesen érkezzenek oda. Az F_1-re felvitt töltések és az F_2-n a megosztás miatt *szétvált* töltések sűrűsége tehát olyan, hogy az elektroszatikus tér eleget tegyen ennek a merőlegességi feltételnek.

Nyilván igaz, hogy ha az F_1 fegyverzetre mondjuk x-szer nagyobb töltést viszünk fel, mint korábban, a kialakuló töltéssűrűségek az előzőhöz hasonlóak, de mindenhol x-szer nagyobbak lesznek. Ennek eredményeként az elektromos térerősség és a potenciál is mindenhol, így a fémek felületén is x-szer akkora lesz, mint az előző esetben. Eszerint a töltés és a végtelenhez viszonyított feszültségek, vagyis a potenciálok között *egyenes arányosság* áll fenn:

$$\begin{aligned} U_1(1) &= a_{11}Q_1, \\ U_2(1) &= a_{21}Q_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Megjegyzés. A fenti képlettel kapcsolatban látnunk kell, hogy az a_{21} nem lehet nulla, hisz az F_1-en levő töltések tere csak a végtelenben tűnik el, így biztos, hogy az F_1-es test terében elhelyezkedő F_2 fegyverzet potenciálja $U_2(1) \neq 0$. Az a_{21} együttható konkrét értéke mindkét fegyverzet adataitól függ. Hasonlóan az a_{11} arányossági tényező sem csak az 1-es test méretétől, alakjától stb, hanem az F_2 adataitól és pozíciójától is függ, hiszen a megosztás miatt annak is van tere, ami hozzájárul $U_1(1)$-hez.

Teljesen hasonló gondolatmenettel oda jutunk, hogy ha csak az F_2 fegyverzetre teszünk töltést, akkor a kialakuló potenciálok

$$\begin{aligned} U_1(2) &= a_{12}Q_2, \\ U_2(2) &= a_{22}Q_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Itt a_{12} és a_{22} (éppúgy, mint a_{21} és a_{11}) a két fegyverzet *együttesére* jellemző mennyiségek.

Végül, ha mindkét fegyverzetre viszünk töltést, akkor a fémek felületén kialakuló töltéssűrűség az első és a második esetnek megfelelő sűrűségek összege kell legyen, mert ez biztosítja azt, hogy az elektromos tér a fémek felületére merőleges. Következésképp az eredő elektromos tér a két esetnek megfelelő tér összege lesz, és ez igaz az egyes testeken kialakuló potenciálokra is (szuperpozíció elve):

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2, \\ U_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Ez a két összefüggés invertálható:

$$Q_1 = c_{11}U_1 + c_{12}U_2, \qquad (7)$$
$$Q_2 = c_{21}U_1 + c_{22}U_2.$$

Ebben a két kifejezésben a c_{ij} $(i, j = 1, 2)$ elemek *kapacitások* (az ún. kapacitásmátrix elemei), amelyek értéke a két testre és azok egymáshoz viszonyított pozíciójára, tehát magára az elrendezésre jellemző.

Ezekkel érdemes kifejezni az a_{ij} elemeket:

$$a_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}, \qquad a_{12} = -\frac{c_{12}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}, \qquad (8)$$
$$a_{21} = -\frac{c_{21}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}, \qquad a_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}.$$

Az energia

További megfontolásainkban fontos szerepe lesz annak, hogy mennyi az elektrosztatikus energiája egy ilyen töltött rendszernek. Ez az energia azonos azzal a munkával, amennyit végeznünk kell ahhoz, hogy a fegyverzetekre töltéseket vigyünk. Ennek kiszámításához tegyük fel, hogy a két fegyverzetet úgy töltjük fel a kívánt potenciálra, hogy a folyamat során a töltések aránya (és ezzel együtt a potenciálok aránya is) mindig ugyanannyi legyen! Ilyenkor mindkét fegyverzet aktuális potenciálja arányos a rá addig felvitt töltéssel, ezért a munka a töltések és az átlagfeszültségek (a végső feszültségek $\frac{1}{2}$ része) szorzataként kapható meg:

$$W = \frac{1}{2}Q_1U_1 + \frac{1}{2}Q_2U_2. \qquad (9)$$

Ennyi munkát kell végeznünk a fegyverzetek feltöltése során, tehát ennyi lesz a rendszer elektrosztatikus energiája. A töltéseket a feszültségekkel, vagy a feszültségeket a töltésekkel kifejezve

$$W = \frac{1}{2}\left[c_{11}U_1^2 + (c_{12} + c_{21})U_1U_2 + c_{22}U_2^2\right], \qquad (10)$$

illetve

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{c_{22}Q_1^2 - (c_{12} + c_{21})Q_1Q_2 + c_{11}Q_2^2}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}. \qquad (11)$$

A rendszer energiája természetesen nem függ attól, hogy hogyan, pl. milyen sorrendben töltjük fel a fegyverzeteket. Erre alapozva belátható,hogy

$$c_{12} = c_{21}. \qquad (12)$$

(Ennek bizonyítása az **F1** függelékben található meg.)

Részkapacitások

A c_{ij} kapacitások helyett igen praktikus bevezetni az úgynevezett *részkapacitásokat* a következő módon:

$$C_1 = c_{11} + c_{12}, \qquad C_2 = c_{22} + c_{12}, \qquad C_k = -c_{12} = -c_{21}. \qquad (13)$$

Ezekkel minden fontos mennyiséget ki tudunk fejezni:

$$Q_1 = C_1U_1 + C_k(U_1 - U_2), \qquad (14)$$
$$Q_2 = C_2U_2 + C_k(U_2 - U_1),$$

illetve

$$U_1 = \frac{C_2Q_1 + C_k(Q_1 + Q_2)}{C_1C_2 + C_k(C_1 + C_2)}, \qquad (15)$$
$$U_2 = \frac{C_1Q_2 + C_k(Q_1 + Q_2)}{C_1C_2 + C_k(C_1 + C_2)},$$

és végül az energia

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{C_2Q_1^2 + C_1Q_2^2 + C_k(Q_1 + Q_2)^2}{C_1C_2 + C_k(C_1 + C_2)}. \qquad (16)$$

A részkapacitások igen jól szemléltethetők az **F2** függelékben megadott kép segítségével. Fontos megjegyeznünk, hogy bár a jelölés ezt sugallhatná, de *nem* igaz, hogy a C_1 vagy a C_2 csak az F_1 vagy F_2 fegyverzet tulajdonsága lenne: ezek a mennyiségek is a teljes elrendezést jellemzik.

A nagy távolság esete

A térben elhelyezett, töltött fémtestek feszültség- és energiaviszonyainak fent bemutatott, kapacitásokra alapozott leírása akkor könnyíti meg a munkánkat, ha a fegyverzetek távolsága azonos nagyságrendű vagy jóval kisebb, mint a testek mérete. Ellenkező esetben, tehát amikor a testek méreténél a távolságuk jóval nagyobb, a megosztás hatása elhanyagolható. Az egyes fegyverzetek saját kapacitását (azt, ami akkor lenne, ha a test magában állna) ekkor is figyelembe kell venni, de a köztük lévő kölcsönhatás szempontjából a töltések jó közelítéssel egy-egy pontba koncentráltnak tekinthetők.

A síkkondenzátor

A számunkra igazán izgalmas esetek közül először azt nézzük meg, hogyan illeszkedik ebbe a képbe egy valóságos (nem ideális) síkkondenzátor. Tegyük fel, hogy a két fegyverzet egyforma, és mondjuk az F_1 fegyverzetet feltöltjük úgy, hogy potenciálja U legyen, miközben vigyázunk arra, hogy az F_2 fegyverzet potenciálja nulla maradjon. A tapasztalat az, hogy praktikusan ugyanannyi, csak ellenkező előjelű töltés kerül mindkét fegyverzetre, (14) szerint tehát

$$Q_1 + Q_2 = C_1 U \approx 0, \tag{18}$$

ahonnan a (14) első egyenletéből adódó $U \approx \dfrac{Q_1}{C_k} \neq 0$ összefüggés miatt egyenesen következik, hogy

$$C_1 (= C_2) \ll C_k. \tag{19}$$

A C_k tényező a kondenzátor *kapacitása* (amit szabatosan *főkapacitásnak* neveznek, de ezt az elnevezést szinte senki nem használja), C_1 és C_2 pedig a *szórt kapacitások.*

A síkkondenzátor kapacitását, ami tehát C_k, az (1) képlet adja meg. Eszerint ha rögzített nagyságú töltés mellett csökkentjük a d távolságot, akkor növekszik C_k, csökken a fegyverzetek közötti feszültség, és a kondenzátorban tárolt energia is. Határesetben, amikor a fegyverzetek összeérnek, a töltések kiegyenlítik egymást, de mivel ez gyakorlatilag nulla feszültség mellett történik, nincs energiaveszteség. (Természetesen nem sérül az energiamegmaradás tétele: a kondenzátor kezdeti elektrosztatikus energiája a lemezek közelítése során a fékezőerők elleni munkát fedezi.)

Töltött gömbök viselkedése

Másik példának tekintsünk két egymáshoz közel, de minden mástól távol lévő gömböt! (A két sugár legyen R_1 és R_2, a középpontok távolsága D, a felületek legkisebb távolsága pedig d!) A probléma az elektrosztatika mint tudományterület kialakulása óta foglalkoztatja a kutatókat, jelentős részben ki is van dolgozva, de máig tartogat érdekességeket. Ennek legfőbb oka, hogy az általános megoldás nem adható meg zárt alakban, a kapacitások, a töltéseloszlások stb. csak végtelen sorok formájában kaphatók meg, és bármely részlet kiszámítása nem egyszerű feladat. Itt most a rendszer olyan tulajdonságait vizsgáljuk csak, amelyek nem igényelnek különleges matematikai felkészültséget.

A két gömb kapacitása, ha külön-külön egyedül állnának, $4\pi\varepsilon_0 R_1$ és $4\pi\varepsilon_0 R_2$ lenne, de valójában C_1 és C_2 ennél kisebb, és d csökkenésével monoton csökkenő függvény. (*Figyelem:* Nem igaz az az elterjedt nézet, hogy C_1 és C_2 aránya a két sugár arányával megegyezne!) A $d = 0$ határesetben mindkettő véges, nem nulla értéket vesz fel, amelyek összege adja a két érintkező gömb együttes kapacitását. Ezzel szemben miközben $d \to 0$, a C_k kapacitás végtelenhez tart. Ennek az az oka, hogy az egymással szemben lévő felületek egyre közelebb kerülnek egymáshoz, és így a megosztás hatása egyre jobban érvényesülhet. Mivel nem síkok, hanem görbült felületek közelítenek egymáshoz, C_k divergenciája (végtelenhez tartása) lassabb, mint a síkkondenzátor esetében. Értékét az irodalom szerint a

$$C_k \approx 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2 R_1 R_2}{(R_1 + R_2) d} \right) + \gamma \right\} \tag{20}$$

összefüggés adja meg, amelyben γ egy ismert nagyságú numerikus konstans.

C_k fenti értéke annál pontosabb, minél kisebb a d távolság. A C_k kapacitás végtelenhez tartásának – hasonlóan a síkkondenzátor esetéhez – érdekes következményei vannak. Elsőként vegyük észre: ha a (15) képletek nevezőjében a végtelen naggyá váló $C_k(C_1 + C_2)$ tag mellett a véges értékhez tartó $C_1 C_2$ tagot elhagyjuk, megállapíthatjuk, hogy

$$U_1 \to U_2 \to \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}, \tag{21}$$

miközben a kettő különbsége

$$\Delta U = U_1 - U_2 \approx \frac{1}{C_k} \frac{C_2 Q_1 - C_1 Q_2}{C_1 + C_2} \tag{22}$$

szerint tűnik el.

Megjegyzés. Ha a két gömböt töltetlen állapotban összeérintjük, és így viszünk fel a rendszerre $Q = Q_1' + Q_2'$ töltést, akkor az a kialakuló egyensúlyban úgy fog eloszlani a két gömb között, hogy $Q_1'/C_1 = Q_2'/C_2$, azaz $C_1Q_2' - C_2Q_1' = 0$ legyen, tehát az érintkező gömbök esetében ez tekintendő a stabil töltéseloszlásnak.

Tanulságos megvizsgálnunk az energiát is. A (16) kifejezés azonos átalakításokkal az alábbi alakra hozható:

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{(Q_1+Q_2)^2}{C_1+C_2} + \frac{1}{2}\,\frac{C_1+C_2}{C_k(C_1+C_2)+C_1C_2}\,\frac{(C_1Q_2 - C_2Q_1)^2}{(C_1+C_2)^2}. \tag{23}$$

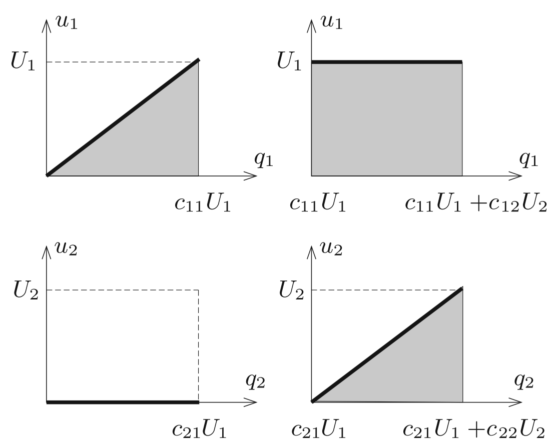
Rögzített össztöltés mellett W akkor minimális, ha $C_2Q_1 - C_1Q_2 = 0$. Ebből következik, hogy minden olyan töltéseloszlás, amelyre ez nem igaz, instabil azokra a mechanizmusokra nézve, amelyek képesek töltést szállítani a két gömb felülete között. Ilyen mechanizmus lehet pl. a két felület között kialakuló (az **F3** függelékben leírt) nagy térerősség miatt átugró szikra, de az is, hogy az érintkezési pontban az ellentétes töltések semlegesítik egymást. Látni kell azonban, hogy a $C_2Q_1 = C_1Q_2$ állapot kialakulása során az elektrosztatikus energia nagyon keveset, ideális esetben elhanyagolható mértékben csökken: a folyamat során az energia változása $\Delta Q \cdot \Delta U$ nagyságrendű, ami annál kisebb, minél kisebb távolság mellett zajlik le a töltéskiegyenlítődés.

Végezetül megjegyezzük, hogy az energia távolságtól való függése következtetni enged a töltött gömbök között fellépő erőkre. Egy ilyen, kicsi d mellett érvényes elemzést mutatunk be az **F3** Függelékben.

Függelék

F1. A kapacitásmátrix szimmetriája

Ennek megmutatásához azt használjuk ki, hogy a rendszer energiája nem függhet attól, hogyan (milyen sorrendben) töltjük fel a fegyverzeteket, csak attól függhet, hogy mekkora rajtuk a feszültség (vagy a töltés). Tegyük fel, hogy először az F_1 fegyverzetet töltjük fel U_1 potenciálúra úgy, hogy az F_2 potenciálját nullán tartjuk (F_2-t földeljük). Ebben a folyamatban F_1-re $c_{11}U_1$ töltést kell vinnünk, az F_2-re pedig $c_{21}U_1$ töltés kerül. Ezután megszüntetjük F_2 földelését, és feltöltjük úgy, hogy potenciálja U_2 legyen, és közben ügyelünk arra, hogy az F_1 potenciálja ne változzon. Ehhez, miközben az F_2-re a már ott lévőhöz még $c_{22}U_2$ töltést adunk, az F_1-re további $c_{12}U_2$ töltést kell vinnünk. A potenciál–töltés viszonyokat az *1. ábrán* szemléltetjük.



1. ábra

(A két fegyverzetre vonatkozó grafikonon a töltéstengelyeken a skála különböző: úgy állítottuk be őket, hogy az összetartozó töltésértékek egymás fölé kerüljenek.) A folyamat során végzett munkát, tehát a töltött rendszer energiáját a sötétebben jelölt részek összterülete adja meg:

$$W = \frac{1}{2}\,c_{11}U_1^2 + c_{12}U_1U_2 + \frac{1}{2}\,c_{22}U_2^2.$$

Nyilvánvaló, hogy a testek feltöltését másképp is, pl. a fordított sorrendben is elvégezhetjük. Ekkor

$$W = \frac{1}{2}\,c_{11}U_1^2 + c_{21}U_1U_2 + \frac{1}{2}\,c_{22}U_2^2$$

adódik. Mivel az energia nem függhet attól, hogy hogyan töltöttük fel a rendszert, a két érték megegyezik, tehát

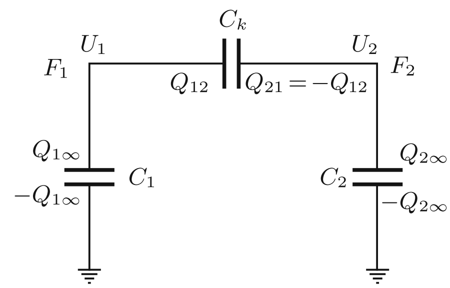
$$c_{12} = c_{21}.$$

F2. A részkapacitások helyettesítőképe

A részkapacitások használata egy igen szemléletes (a mérnöki gyakorlatból kölcsönzött) helyettesítőkép bevezetését teszi lehetővé.

A *2. ábrán* jelölt kapacitások ideális kondenzátorok, a sarkok a két fegyverzetet (F_1, F_2), a földelés pedig a nulla potenciálú helyet, esetünkben a végtelent jelenti. Az egyes töltések értéke

$$\begin{aligned} Q_{1\infty} &= Q_1 - Q_{12}, \\ Q_{2\infty} &= Q_2 - Q_{21}, \\ Q_{12} &= \frac{C_k(C_2Q_1 - C_1Q_2)}{C_1C_2 + C_k(C_1 + C_2)} = -Q_{21}. \end{aligned}$$



2. ábra

Természetesen mindennek akkor van értelme, ha az itt szereplő, eddig csak formálisan kezelt C_1, C_2 és C_k kapacitások pozitívok. Ennek teljesülését viszont könnyű belátni, elég végiggondolni, milyen előjelű töltések kerülnek az egyes fegyverzetekre, ha az egyiket földeljük, a másikat pedig valamilyen feszültségre feltöltjük. Ezt az elemzést az Olvasóra bízzuk.

F3. Azonos töltésű gömbök is vonzhatják egymást

Mielőtt ezt az igen meglepő jelenséget tárgyalnánk, érdemes visszatérnünk a feszültségekhez! Fontos észrevétel, hogy bár a (22)-vel adott ΔU feszültség nagyon kicsiny, határesetben el is tűnik, a két gömb között kialakuló elektromos térerősség mégis annál nagyobb, minél kisebb a gömbök távolsága. A térerősség átlagos értéke a legközelebbi pontok között az $E \sim \Delta U/d$ kifejezéssel becsülhető, és ez, ha $C_2Q_1 \neq C_1Q_2$, akkor végtelenhez tart. (Ez a logaritmusfüggvény azon tulajdonságának köszönhető, hogy az $\ln(1/d)$ végtelenhez tart, a $d \cdot \ln(1/d)$ kifejezés viszont nullához közelít, ha $d \to 0$.) Ez fizikailag úgy értelmezhető, hogy a $C_2Q_1 = C_1Q_2$ esetet kivéve, nagyon kicsiny d távolság mellett az elektromos megosztás miatt akkor is ellentétes előjelű töltések ülnek a felületek legközelebbi pontjai környékén, ha Q_1 és Q_2 előjele azonos. Sőt, mi több, az ellentétes töltéseknek megfelelő töltéssűrűség a távolság csökkenésével egyre kisebb felületre koncentrálódik.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a két gömb között (a $Q_1/C_1 = Q_2/C_2$ kiegyenlített esetet kivéve) mindig vonzás alakul ki, ha a gömbök elég közel kerülnek egymáshoz. Ez közismert, ha a két töltés ellentétes előjelű, vagy az egyikük nulla, de meglepő, ha a töltések azonos előjelűek! A jelenség oka az, hogy – ahogy már említettük – a gömbök egymáshoz közeli oldalán a megosztás miatt *ellentétes*, a távoli oldalakon azonos előjelű töltések ülnek, és a nagyon kicsiny távolság miatt az előbbiek vonzása érvényesül. Matematikailag ez abból következik, hogy míg C_1 és C_2 jó közelítéssel d lineáris függvénye szerint közeledik a $d = 0$ esetén felvett $C_1(0)$ és $C_2(0)$ értékekhez, addig C_k a (20) képlet szerint végtelenhez tart.

Az energia (23) kifejezéséből indulunk ki. Ez a $C_k \gg C_1, C_2$ esetnek megfelelő közelítésben tovább egyszerűsödik:

$$W = \frac{1}{2}\frac{(Q_1 + Q_2)^2}{C_1 + C_2} + \frac{1}{2C_k}\frac{(C_1Q_2 - C_2Q_1)^2}{(C_1 + C_2)^2}.$$

(Ez a kifejezés is annál pontosabb, minél nagyobb a C_k kapacitás, azaz minél közelebb van a két gömb egymáshoz.) A második tag viselkedését a C_k végtelenhez tartása határozza meg, ezért itt C_1 és C_2 helyett vehetjük a $C_1(0)$ és $C_2(0)$ értékeket. Az első tagban használjuk a

$$C_1 + C_2 \approx C_1(0) + C_2(0) + \Delta C$$

közelítést, ahol ΔC egy d-vel arányos szám. Mind a számlálót, mind a nevezőt megszorozva a $C_1(0) + C_2(0) - \Delta C$ kifejezéssel, és a $(\Delta C)^2$-es tagot már elhanyagolva végül is a

$$W - W(0) \approx -\frac{\Delta C}{2}\left(\frac{Q_1 + Q_2}{C_1(0) + C_2(0)}\right)^2 + \frac{1}{2C_k}\left(\frac{Q_1C_2(0) - Q_2C_1(0)}{C_1(0) + C_2(0)}\right)^2$$

kifejezést kapjuk, ahol a $W(0)$ az energia $d=0$-nál vett értéke.

Tekintsük először a $Q_1C_2(0)=Q_2C_1(0)$ kiegyensúlyozott esetet! Ilyenkor a fenti energiakifejezésnek csak az első tagja nem nulla, és nagyon szemléletes, hogy a gömbök azonos előjelű töltése miatt taszítást kell leírnia. Ennek megfelelően ez a tag d növekedésével csökken, azaz ΔC egy d-vel arányos *pozitív* mennyiség. A második tag a $Q_1C_2(0)\neq Q_2C_1(0)$ kiegyenlítetlen helyzetben mindig pozitív, és a távolság növekedésével nő, tehát egy vonzóerőnek felel meg. A kérdés, hogy hogyan viselkedik az összegük. Mivel a logaritmus függvény olyan, hogy $d\cdot\ln(1/d)\to 0$, ha $d\to 0$, a két tag hányadosában szereplő $\Delta C\cdot C_k$ nullához tart, ahogy d csökken. Ebből következik, hogy minél kisebb a d távolság, annál nagyobb lesz a második tag az elsőhöz képest, tehát a gömbök viselkedését, ha azok elég közel kerülnek egymáshoz, ez a tag fogja meghatározni. Így elég kis távolság esetén a *vonzás* érvényesül!

Ennek fényében gondoljuk végig, mi történik, ha két azonos előjellel, mondjuk pozitívan, de nem kiegyenlítetten töltött gömböt egymáshoz közelítünk! Legyen pl. $Q_2/C_2(0)>Q_1/C_1(0)$. Elég nagy távolság esetén mindkét felületen a töltéssűrűség mindenhol pozitív, és a gömbök taszítják egymást. A távolságot csökkentve a töltések a külső pólusok felé tolódnak, elég kis távolságnál az F_1 belső felületén a töltéssűrűség negatívvá válik, még kisebb távolságnál pedig a különböző töltések közötti vonzás válik dominánssá. Amikor a két gömb összeér, megtörténik a töltéskiegyenlítődés, aminek során a szemben lévő ellentétes töltések eltűnnek, a felületi töltéssűrűség újra mindenhol pozitívvá válik, és a gömbök újra taszítják egymást.

Woynarovich Ferenc