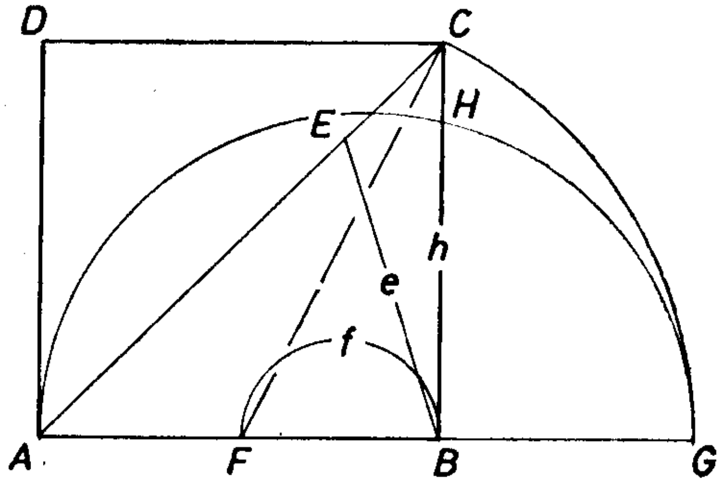
Láttuk az F. 2250. feladatban[1], hogy a $h = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0{,}786\ 15\ldots$ szám jó közelítő értéke az $f = \pi/4 = 0{,}785\ 39\ldots$ -nek (1 ‰-nél kisebb hibával), ahol mindkét tizedestört alsó közelítő érték, 5 értékes számjegyre, és π-ből első 6 értékes jegyét használtuk fel : 3,141 59. Ezekből a vizsgálandó kifejezés nevezőjére csupán 2 értékes jegyet tartalmazó korlátokat kapunk (éppen a közelítés miatt):

(1) $$0{,}00075 < h - f < 0{,}00077.$$

De mivel a hányadosban is 2 értékes jegyet kíván a feladat, azért (1) helyére már eleve több, legalább 3 értékes jegyet tartalmazó korlátokat keresünk, vagyis h-ra pontosabb közelítést. Nem lehet ugyanis megválaszolni a kérdést, ha nem döntünk h és e közelítésének mértékéről. Ezek azonban csak rajtunk állnak.



Írjuk így: $h = \sqrt{\sqrt{1{,}25} - 0{,}5}$. Az iskolai függvénytáblázatból 4 értékes jegyre $\sqrt{1{,}25} = 1{,}118$, és éppen nem látható, hogy ez alsó vagy felső közelítő érték. Ismeretes, hogy ekkor $1{,}25 : 1{,}118 = 1{,}118\ 067\ 97\ldots$ is közelítés, és számtani közepük : $1{,}118\ 033\ 98\ldots$ jobb közelítés:

$$\frac{1{,}118 + \dfrac{1{,}25}{1{,}118}}{2} - \sqrt{1{,}25} = \frac{\left(\sqrt{1{,}25} - 1{,}118\right)^2}{2 \cdot 1{,}118} < \frac{0{,}0005^2}{2} < 2 \cdot 10^{-7}.$$

Ez is felső közelítő érték, mert az eltérés pozitív (az 1,118 kiindulás pedig alsó közelítés volt).

Ezek szerint a $2 \cdot 10^{-7}$-nel növelt számtani közepet 7 tizedesre fölkerekítve, felső közelítő értéket kapunk, továbbá alsót, ha $2 \cdot 10^{-7}$-nel csökkentjük és lekerekítjük. Mindjárt levonjuk a 0,5 tagot :

$$0{,}618\ 0337 < h^2 < 0{,}618\ 0342.$$

A bal oldal négyzetgyökének alsó közelítő értéke 3 értékes jegyre 0,786, ennélfogva $0{,}618\ 0342 : 0{,}786 = 0{,}786\ 3030\ldots$ felső közelítő érték, és ismét felső közelítő a számtani közepük, így

$$0{,}786\ 15 < h < 0{,}786\ 1515.$$

A π-ből már eddig is felhasznált jegyekkel

$$-0{,}7854 < -f < -0{,}785\ 3975,$$

tehát (1) helyett ezt használhatjuk:

(1a) $$0{,}000\ 75 < h - f < 0{,}000\ 754.$$

A vizsgálandó kifejezés számlálójában $e = \sqrt{10}/4 = \sqrt{0{,}625}$. Itt a $\sqrt{10}$ is gyakran használt közelítő értéke a π-nek – bár durvább –, tehát tulajdonképpen ez a kérdésünk : hányszor kisebb a 2250. feladatbeli közelítés hibája a $\pi \approx \sqrt{10}$ hibájánál.

A fentiekhez hasonlóan finomítva a táblázatból vett értéket

$$0{,}790\ 5604 < e < 0{,}790\ 5695,$$

[1] K. M. L. 61 (1980), 213. oldal.

és f-hez ismét a 6 értékes jegyet véve

$$0{,}005\ 1694 < e - f < 0{,}005\ 172.$$

És most már

$$\frac{0{,}005\ 1694}{0{,}000\ 754} < \frac{e-f}{h-f} < \frac{0{,}005\ 172}{0{,}000\ 75} \tag{2}$$

Itt az alsó korlát 6,855..., a felső 6,896, azt kaptuk tehát, hogy elég volt tudni π, értékét 6 értékes jegyre, és a hányados 2 értékes számjegyre 6,9.

5 értékes jeggyel 3,1416 (a $3{,}141\ 55 < \pi < 3{,}141\ 65$ az intervallum) mellett (1a) jobb oldalára 0,000 754 helyére 0,000 7765 lép és (2) bal oldalára 6,65... Ez tehát nem elegendő a hányadosnak olyan intervallumba való bezárásához, amelynek minden számára egyértelmű a két értékes jegyre való kerekítés eredménye.