I. megoldás. Tekintsük a megadott számok közül a legkisebb abszolút értékűt (ha több ilyen volna, akkor ezek egyikét). A többi szám közül az ennél nagyobbakat csökkentsük, a nála kisebbeket pedig növeljük, mindaddig, míg a szomszédos számok távolsága 1-re nem csökken. A feladat feltételei alapján ezt meg szabad tenni, s ezzel a számok abszolút értékét is – egy kivételével – csökkentettük. Mivel kisebb abszolút értékű szám négyzete kisebb, a kapott számok négyzetösszege legföljebb annyi, mint az eredeti számok négyzetösszege. Jelöljük az új számaink közül a középsőt x-szel, a többiek értéke ekkor $x-2$, $x-1$, illetve $x+1$ és $x+2$, négyzetösszegük pedig $5x^2+10\geq 10$. Így az eredeti négyzetösszeg nagyobb volt 10-nél, és ezt kellett bizonyítanunk.

R. Zs.

II. megoldás. Rendezzük nagyság szerint növekvően a számokat, és jelöljük a k-adikat x_k-val, az öt szám számtani közepét $\bar{x}$-sal. Először belátjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k-\bar{x})^2=\sum_{k-1}^{m}x_k^2-m\bar{x}^2, \tag{1}$$

ahol $m=5$. Ha ugyanis (1) bal oldalán elvégezzük a négyzetre emelést, első tagként a jobb oldal első tagját kapjuk. A négyzetek második tagja

$$-2\bar{x}\sum_{k=1}^{m}x_k=-2m\bar{x}^2$$

miatt egyenlő a harmadik tag 2-szeresével, és a négyzetek harmadik tagjaival együtt éppen (1) jobb oldalán a második tagot adják.

A következő lépésünk a

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_k-x_j)^2=2m\sum_{k=1}^{m}(x_k-\bar{x})^2$$

összefüggés igazolása. Most feltehetjük, hogy $\bar{x}=0$, mert különben az $x_k=\bar{x}$ különbségeket írhatjuk az x_k számok helyére. Ismét elvégezve a négyzetre emelést a bal oldalon, a négyzetes tagokból azt kapjuk, ami a jobb oldalon áll, a vegyes tagok összege pedig $\bar{x}=0$ miatt nulla.

Mivel $x_{k+1}>x_k+1$, általában $k\neq j$ esetén $|x_k-x_j|>k-j$, tehát $m=5$ mellett

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_k-x_j)^2>4^2+2\cdot 3^2+3\cdot 2^2+4\cdot 1^2=50.$$

Emiatt (1) és (2) alapján

$$\sum_{k=1}^{m}x_k^2\geq\sum_{k=1}^{m}(x_k-\bar{x})^2=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_k-x_j)^2>10,$$

amint azt igazolnunk kellett.

Megjegyzés. A kitűzés szövegében a számok különbségét – a közhasználatot követve – természetesen abszolút értékben értettük. Ez nem is okozott zavart a megoldóknak.