Az a, b, c valós számok olyanok, hogy ha $|x| \le 1$, akkor

$$|ax^2 + bx + c| \le 1$$

. Mutassuk meg, hogy $|x| \le 1$ mellett az

$$|cx^2 + bx + a| \le 2$$

is teljesül.

I. megoldás. Jelöljük az $ax^2 + bx + c$ függvényt f-fel, a $cx^2 + bx + a$ függvényt pedig g-vel. Mivel a két függvény értékei a $[-1,1]$ intervallum végpontjaiban megegyeznek, g-re (2) helyett

$$|cx^2 + bx + a| \leqq 1 \tag{3}$$

is teljesül, ha g ebben az intervallumban monoton. Így van ez, ha $c = 0$,, vagy $c \ne 0$, de a g függvény a szélső értékét a $[-1,1]$ intervallumon kívül veszi fel. Szokás szerint g-t teljes négyzetté kiegészítve látható, hogy

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4c}\right),$$

vagyis g a szélső értékét az $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$ helyen veszi fel. Ha $|x_0| \leqq 1$, legyen x_1 a $[-1,1]$ intervallum x_0-hoz közelebbi végpontja. (Ha $x_0 = 0$, legyen $x_1 = 1$.) Ekkor

$$g(x_0) = g(x_1) - c(x_1 - x_0)^2 = f(x_1) - f(0)(x_1 - x_0)^2$$

miatt $x = x_0$ mellett teljesül (2) hiszen (1) miatt $\left|f(x_i)\right| \leqq 1, \left|f(0)\right| \leqq 1$, és x_1 választása miatt $|x_0 - x_1| \leqq 1$. Ebből következik, hogy (2) a $-1 \leqq x \leqq x_0$, és $x_0 \leqq x \leqq 1$ mellett is teljesül, hiszen g ebben a két intervallumban monoton, és azt már tudjuk, hogy (2) ezek végpontjaiban teljesül.

Hetyei Gábor (Pécs, Leöwey K. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen most is $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Ekkor

$$\begin{aligned} 2g(x) &= 2(c + bx + a) + 2c(x^2 - 1) = \\ &= (1 + x)(c + b + a) + (1 - x)(c - b + a) + 2c(x^2 - 1) = \\ &= (1 + x)f(1) + (1 - x)f(-1) + 2f(0)(x^2 - 1), \end{aligned}$$

amiből (1) alapján kapjuk, hogy ha $-1 \leqq x \leqq 1$, akkor

$$2|g(x)| \leqq (1 + x) + (1 - x) + 2(1 - x^2) \leqq 4,$$

hiszen itt $1 + x$ is, $1 - x$ is nem negatív.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása nem javítható, amint azt az $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ számhármas mutatja.

2. Érdemes egy pillanatra eltöprengeni azon, ekvivalens-e a feladat állítása azzal, hogy az

$$\text{(1a)} \quad |x| \leqq 1, \qquad \text{(1b)} \quad |ax^2 + bx + c| \leqq 1$$

egyenlőtlenségekből következnek a

$$\text{(2a)} \quad |x| \leqq 1, \qquad \text{(2b)} \quad |cx^2 + bx + a| \leqq 2$$

egyenlőtlenségek. Sokan úgy gondolták, hogy a két állítás ekvivalens, és így arra az eredményre jutottak, hogy a feladat állítása nem igaz, hiszen például $a = 10$, $b = c = x = 0$ mellett (1a), (1b), (2a) teljesülnek, (2b) mégsem igaz. Viszont $a = 10$, $b = 0$, $c = 0$, $x = 1$ mellett (1a) teljesül, és (1b) nem, tehát ez az a, b, c számhármas nem biztosítja azt, hogy (1a)-ból következik (1b), így nem meglepő, hogy mellette (2a) teljesül, de (2b) nem.