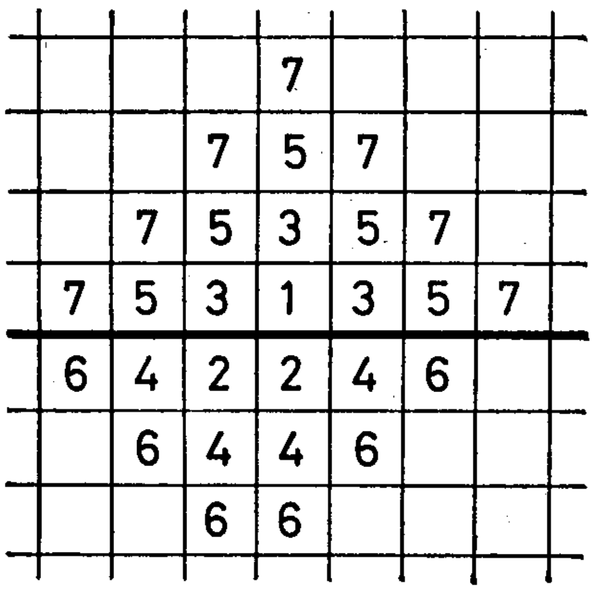
Először is belátjuk, hogy a keresett k legalább 3. Az egyest tartalmazó mezőnek négy másik mezővel van közös oldala, ugyanakkor a papírlapon csak 2 darab kettes szerepel. Így az egyik szomszédos mezőbe kettőnél nagyobb szám kerül, tehát különbségük legalább 2.

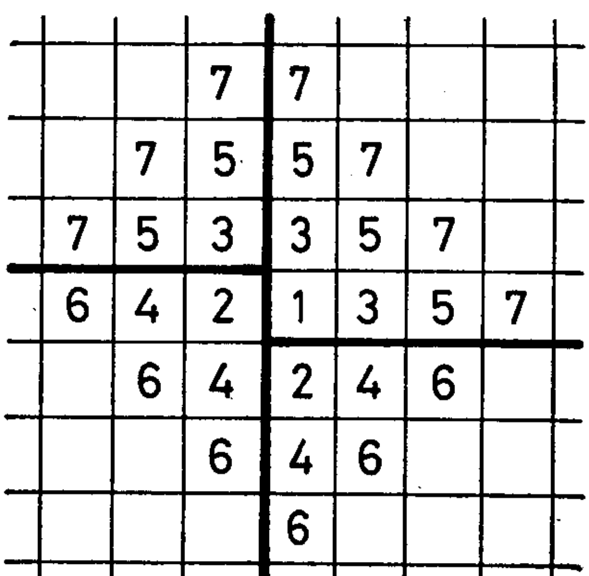
A következőkben megmutatjuk, hogy $k = 3$ esetén a kitöltés elvégezhető. A négyzetháló egy egyenesével a papírlapot két félsíkra osztjuk. Az egyik félsík mezőibe csak páratlan, a másik félsík mezőibe csak páros számokat írunk. Az egyest és a ketteseket a határegyenes mentén helyezzük el, úgy, hogy az egyik kettest tartalmazó mezőnek legyen közös oldala az egyest tartalmazó mezővel is, és a másik kettest tartalmazó mezővel is. Az egyes fölé és mellé hármasokat írunk, ezek fölé és mellé ötösöket és így tovább (1. ábra).



1. ábra

Hasonlóan járunk el a másik félsíkban a páros számok elhelyezésénél.

Az egyező számokat tartalmazó ék alakú rétegekben mindig kettővel nagyobb számok vannak, mint a megelőző rétegekben, az egyes rétegekben található számok száma is mindig 2-vel nő. Így ha 1 darab egyes és 2 darab kettes számból indultunk ki, akkor tetszőleges pozitív egész n is éppen n-szer fog előfordulni. A kitöltés módjából következik, hogy egy félsíkon belül a közös oldallal rendelkező mezőkben levő számok különbsége 2 vagy 0. A különböző félsíkokból való, közös oldallal rendelkező mezőkben levő számok pedig szomszédosak. A leírt kitöltés tehát megfelel a feladat feltételeinek.



2. ábra

			7			
		6	5	7		
	6	4	3	5	7	
6	4	2	1	3	5	7
7	5	3	2	4	6	
	7	5	4	6		
		7	6			

3. ábra

Papp Gábor (Budapest, Móricz Zs. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Megmutatható, hogy $k=3$ esetén minden megfelelő kitöltés az 1–3. ábrákon látható kitöltésekből tükrözéssel, 90°-os elforgatással, valamint eltolással állítható elő.