I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:*

a) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6}{1-x^2}$, (*4 pont*)

b) $\cos(2x)+5\sin x=3$, (*5 pont*)

c) $|x-2|+x=4\sqrt{x}-2$. (*5 pont*)

Megoldás. *a)*

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=-\frac{6}{(x-1)(x+1)} \qquad \Big/\cdot(x-1)(x+1),\quad x\neq\pm1$$

$$2x(x+1)+3(x-1)=-6;\quad 2x^2+5x+3=0;\quad x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}.$$

$x_1=-1$, ez a kikötés miatt nem gyöke az egyenletnek; $x_2=-\dfrac{3}{2}$. Az egyenlet megoldása: $x=-1{,}5$. (Ellenőrzés: $-4{,}8=-4{,}8$.)

b)

$$1-2\sin^2 x+5\sin x=3;\quad 0=2\sin^2 x-5\sin x+2;$$

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}.$$

$(\sin x)_1=2$ nem lehetséges; $(\sin x)_2=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ x_1=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$; $x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi$, $(l\in\mathbb{Z})$. (Ellenőrzés: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=3$.)

c) Kikötés: $0\le x$. Ha $2\le x$, akkor $x-2+x=4\sqrt{x}-2$; $2x=4\sqrt{x}$, innen $\sqrt{x}\big(\sqrt{x}-2\big)=0\ \Rightarrow\ x_1=0$; $x_2=4$; az x_1 kisebb 2-nél, tehát nem megoldás, a 4 azonban igen.

Ha $x<2$, akkor $-(x-2)+x=4\sqrt{x}-2$; ebből a $4=4\sqrt{x}$ egyenletet kapjuk, aminek a megoldása $x_3=1$. Az egyenlet gyökei tehát $x_2=4$; $x_3=1$. (Ellenőrzés: $2=2$, illetve $6=6$.)

2. *Egy háromszögben az egyik oldal kétszer akkora, mint egy másik oldal; az előbbivel szemközti szög 60°-kal nagyobb az utóbbival szemközti szögnél. A háromszög területe $2\sqrt{3}$ területegység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?* (*12 pont*)

Megoldás. Legyen a c oldal kétszerese a-nak, így $\gamma=\alpha+60^\circ$, írjuk fel a szinusz-tételt:

$$\frac{\sin(\alpha+60^\circ)}{\sin\alpha}=\frac{2a}{a},\quad \sin(\alpha+60^\circ)=2\sin\alpha;$$

$$\sin\alpha\cdot\cos60^\circ+\cos\alpha\cdot\sin60^\circ=2\sin\alpha;\quad \sin\alpha\cdot\frac{1}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sin\alpha;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{3}{2}\sin\alpha \quad \Big/\cdot\frac{2}{3},\ :\cos\alpha\neq0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ \alpha=30^\circ;\quad \gamma=90^\circ;\quad \beta=60^\circ.$$

Alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet: $\dfrac{a\cdot(2a)\sin60^\circ}{2}=2\sqrt{3}$; $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$; innen $a^2=4\ \Rightarrow\ a=2$, $c=4$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot4=2\sqrt{3}$. Megkaptuk a keresett adatokat.

3. *a) Igaz-e az A, B kijelentések tetszőleges logikai értékénél, hogy*

$$\big((\neg A\to\neg B)\wedge A\big)\to B=\text{i}?$$

($\neg A=$ nem A.) (*5 pont*)

b) Igaz-e, ha $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=0$? Válaszunkat indokoljuk. (*3 pont*)

c) Hány pontja lehet annak az egyszerű, összefüggő gráfnak, amelynek 8 éle van? (*4 pont*)

Megoldás. *a)* A válasz: NEM, az indoklás:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	$(\neg A \to \neg B) \wedge A$	$((\neg A \to \neg B) \wedge A) \to B$
i	i	h	h	i	i	i
i	h	h	i	i	i	h
h	i	i	h	h	h	i
h	h	i	i	i	h	i

Azaz, ha $A = \mathrm{i}$, $B = \mathrm{h}$, akkor a művelet eredménye hamis.

Megjegyzés. Itt az *a tipikusan hibás* következtetés van kicsit átfogalmazva, amit gyakran tapasztalhatunk: „Ha A, akkor B, mivel nem A, tehát nem B".

b) A válasz: NEM. Elég egy megfelelő ellenpéldát mutatni.

$$\begin{array}{llll} \text{Pl.:} & a_n = 0,1,0,1,0,1,\ldots; & b_n = 0,-1,0,-1,0,-1,\ldots, & \text{vagy} \\ \text{pl.:} & a_n = n + \dfrac{1}{n}; & b_n = -n, & \text{vagy} \\ \text{pl.:} & a_n = 2^{-n} - \sin\left(\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right); & b_n = \sin\left(\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right) & \text{stb.} \end{array}$$

c) A pontok száma nem lehet 4, vagy annál kevesebb, mert az ilyen gráfok éleinek száma legfeljebb 6 lehet (ha a 4 pontú gráf teljes gráf). Az n pontú legkevesebb élt tartalmazó összefüggő gráf (fa gráf) éleinek száma $n-1$. Ha $n-1=8$, akkor $n=9$. A gráf pontjainak száma nem lehet 9-nél nagyobb, mert akkor nem lenne összefüggő. A megoldás tehát: $5 \le n \le 9$, azaz legalább 5 és legfeljebb 9. Ezek mindegyike előállítható.

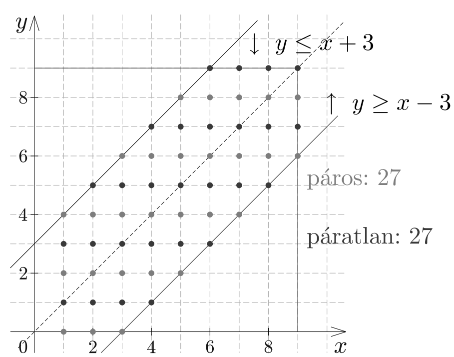
4. *a*) *Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben a számjegyek különbségének abszolút értéke legfeljebb* 3? (*8 pont*)

b) *Ha ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk kettő különböző számot, mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik páros, a másik páratlan lesz?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a kétjegyű szám első jegye x, a második y, ahol $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$ és $x, y \in N$.

$$\begin{aligned} |x-y| \le 3, \quad & \text{ha } y \le x, \text{ akkor } x - y \le 3 \;\Rightarrow\; y \ge x-3; \\ & \text{ha } x \le y, \text{ akkor } y - x \le 3 \;\Rightarrow\; y \le x+3. \end{aligned}$$

Ábrázolva az egyeneseket, a megadott tartományban 54 rácspont van, azaz 54 ilyen szám van.



b) Az *ábráról* az is könnyen leolvasható, hogy 27 páros, 27 páratlan szám van közöttük, így

$$P(A) = \frac{\binom{27}{1}\cdot\binom{27}{1}}{\binom{54}{2}} = \frac{27\cdot 27}{\frac{54\cdot 53}{2\cdot 1}} = \frac{27}{53}.$$

II. rész

5. *Egy téglalap oldalainak mérőszáma egész szám. Ezt a téglalapot oldalaival párhuzamos egyenesekkel egységnégyzetekre daraboltuk, majd a széleken levőket fehérre, a többit feketére festettük.*

a) *Mekkorák a téglalap oldalai, ha kétszer annyi fekete négyzet lett, mint amennyi fehér?* (*9 pont*)

b) *Az a*) *részben kapott téglalapokból kiválasztottuk azt, amelynek oldalméretei között legkisebb a különbség, majd egy 8 egység sugarú piros körlap közepére erősítettük. Az így kapott eszközt céltáblának használjuk, ahol a telitalálatot az jelenti, ha fehér mezőbe csapódik a lövedék. Feltesszük, hogy minden lövés eltalálja a céltáblát, és annak minden pontját egyenlő valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el? Az eredményt százalékban egészre kerekítve fejezzük ki.* (*7 pont*)

Megoldás. *a)* A téglalap oldalainak hosszát jelölje n, k $(n, k \in \mathbb{Z}^+)$, a fekete négyzetek száma $(n-2)(k-2)$, ez kétharmada az összes négyzet számának, vagyis

$$\frac{2}{3}n \cdot k = (n-2)(k-2); \quad 2nk = 3(nk - 2n - 2k + 4);$$
$$0 = nk - 6n - 6k + 12 \quad / + 24;$$
$$24 = nk - 6n - 6k + 36; \quad 24 = (n-6)(k-6); \quad 24 = 2^3 \cdot 3,$$

ezért a 24-nek 8 pozitív osztója van. A lehetséges párosítások:

$$n-6=1, \ k-6=24; \qquad n-6=2, \ k-6=12;$$
$$n-6=3, \ k-6=8; \qquad n-6=4, \ k-6=6.$$

(A többi ugyanezeket a számpárokat adja felcserélve.)

A téglalap két oldalának hosszára tehát a következő lehetőségek adódnak:

7, 30,	ekkor	70 fehér, 140 fekete
8, 18,		48 fehér, 96 fekete
9, 14,		42 fehér, 84 fekete
10, 12 (egység),		40 fehér, 80 fekete négyzet keletkezett.

b) A céllaphoz választott téglalap a 10×12-es lesz, itt a legkevesebb a különbség az oldalak hossza között. A középpontokat egymáshoz illesztve látható, hogy a téglalap a körlap belsejében van, a félátló kisebb a sugárnál $(5^2+6^2 < 8^2)$. Annak a valószínűsége, hogy egy lövés telitalálatot ér: $p = \dfrac{40}{8^2\pi} = 0{,}1989$, nem ér telitalálatot: $q = 0{,}8011$.

Jelölje ξ azt, hogy a négy lövésből hány telitalálat lett. ξ lehetséges értékei: $0, 1, 2, 3, 4$.

$$P(\xi = 0) = \binom{4}{0} p^0 q^4 = 0{,}4119; \quad P(\xi = 1) = \binom{4}{1} p^1 q^3 = 0{,}4090.$$

A komplementer esemény valószínűsége: $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}4119 + 0{,}4090 = 0{,}8209$, ezért az esemény valószínűsége: $1 - 0{,}8209 = 0{,}1791$.

Annak a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el, 18%.

6. *a) Az $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ függvény grafikonját tükrözzük az $A(2;5)$ pontra. Hol metszi az így kapott görbe az $f(x)$ grafikonját?* *(5 pont)*

b) Húzzunk érintőt a $P(3;-4)$ pontból $f(x)$ grafikonjához. Írjuk fel az érintők egyenletét. *(6 pont)*

c) Mekkora a területe annak a síkidomnak, melyet az $f(x)$ függvény grafikonja és a $P(3;-4)$ ponton átmenő érintők zárnak közre? *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Az $f(x)$ függvény grafikonja egy parabola, amelynek tengelypontja az origó, tengelye az y tengely, paramétere 2. Az $A(2;5)$ pontra tükrözve a tengelypontja $T'(4;10)$ lesz, tengelye párhuzamos marad az y tengellyel, lefelé nyílik, így egyenlete: $y - 10 = -\dfrac{1}{4}(x-4)^2$, y-ra rendezve: $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2x + 6$.

(Ezt megkaphatjuk másképpen is. Legyen a $P(x;y)$ pont tükörképe az $A(2;5)$ pontra nézve $P'(x';y')$, ekkor a felezőpont koordinátáira vonatkozó tétel szerint $\dfrac{x+x'}{2} = 2$, $\dfrac{y+y'}{2} = 5 \ \Rightarrow \ x = 4 - x'$; $y = 10 - y'$. Ezeket beírva az $y = \dfrac{1}{4}x^2$-be kapjuk, hogy $4(10-y') = (4-x')^2$, ami rendezve: $y' = -\dfrac{1}{4}x'^2 + 2x' + 6$, tehát ugyanaz, mint a korábban kapott egyenlet.)

A két görbe metszéspontjait az $\dfrac{1}{4}x^2 = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ egyenletből kapjuk. Rendezve:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{1},$$
$$x_1 = 6; \quad y_1 = 9,$$
$$x_2 = -2; \quad y_2 = 1.$$

A metszéspontok: $M(-2;1)$, $N(6;9)$.

b) A $P(3;-4)$ ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete: $y-(-4)=m(x-3)$; $y=mx-3m-4$. Ezt beírva y helyére $mx-3m-4=\frac{1}{4}x^2$, majd rendezve az $x^2-4mx+12m+16=0$ paraméteres másodfokú egyenletet kaptuk, amelynek egy megoldása van a két görbe érintkezése miatt, vagyis $D=0$, azaz

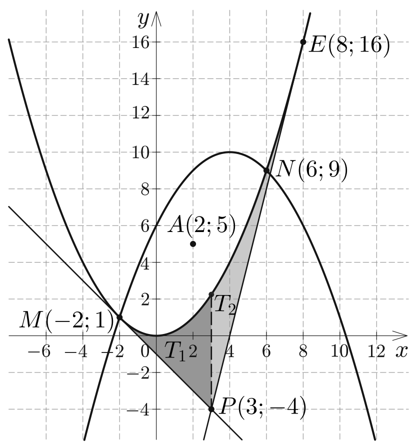
$$(-4m)^2-4\cdot 1\cdot(12m+16)=0;\quad 16m^2-48m-64=0\quad /:16;$$

$$m^2-3m-4=0;\quad m_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}\quad\Rightarrow\quad m_1=4;\ m_2=-1.$$

Az érintők egyenlete: $y=4x-16$, $y=-x-1$.

Eljuthatunk az érintők egyenletéhez más módon is. Az $f(x)$ függvény deriváltja $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot 2x=\frac{1}{2}x$. A parabola $P_0\left(x_0;\frac{1}{4}x_0^2\right)$ pontjához húzott érintő meredeksége $m=f'(x_0)=\frac{1}{2}x_0$, az érintő egyenlete

$$y-\frac{1}{4}x_0^2=\frac{1}{2}x_0(x-x_0);\quad y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2.$$



Ennek az egyenesnek pontja a $P(3;-4)$ pont, tehát:

$$-4=\frac{1}{2}x_0\cdot 3-\frac{1}{4}x_0^2;$$

rendezve:

$$x_0^2-6x_0-16=0;$$

$$(x_0)_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+64}}{2}\quad\Rightarrow$$

$$(x_0)_1=8;\ (x_0)_2=-2.$$

Megkaptuk az érintési pontok első koordinátáit. (Ezek egyébként kellenek majd a *c*) részhez.) Az érintők egyenlete:

$$y=\frac{1}{2}\cdot 8x-\frac{1}{4}\cdot 8^2=4x-16;$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot x-\frac{1}{4}\cdot(-2)^2=-x-1.$$

c) Az érintési pontok abszcisszái az $x_{1,2}=\frac{4m}{2}$ egyenletből adódnak (illetve a *b*) rész második megoldásából már ismerjük őket), $m=4$ esetén 8; $m=-1$ esetén -2 lesz értékük. A területszámítást két részre bontjuk:

$$T_1=\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{4}x^2-(-x-1)\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{3}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{3}+\frac{1}{2}\cdot 9+3-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-8}{3}+\frac{1}{2}\cdot 4-2\right)=\frac{125}{12},$$

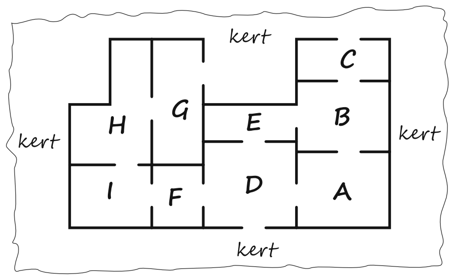
$$T_2=\int_{3}^{8}\left(\frac{1}{4}x^2-(4x-16)\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+16x\right]_{3}^{8}=\frac{128}{3}-\frac{129}{4}=\frac{125}{12}.$$

A síkidom területe $T=T_1+T_2=\frac{125}{6}$ területegység lett.

7. *a) Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra igaz, hogy $3 \mid n^3 + 8n$.* *(6 pont)*

b) Oldjuk meg a $p + q^n = 2019$ egyenletet, ahol p, q pozitív prím, n pozitív egész szám. Használjuk a függvénytáblázatot. *(6 pont)*

c) Nagy úr éppen most kísérte végig vendégeit a birtokán, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer mentek át. A bemutató végén a nappaliban pezsgővel koccintottak a találkozásra. Melyik helyiség a nappali? A helyiségek betűjelének felsorolásával adjunk meg egy lehetséges bejárási sorrendet. *(4 pont)*



Nagy úr házának alaprajza

Megoldás. *a) I. megoldás.* $n^3+8n = n(n^2+8)$, az n 3-mal osztva 0-t, vagy ± 1-et ad maradékul. Ha $n = 3k$, akkor a szorzat első tényezője osztható 3-mal, így a szorzat is. Ha $n = 3k \pm 1$, akkor

$$n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1;$$
$$n^2 + 8 = 9k^2 \pm 6k + 9 = 3(3k^2 \pm 2k + 3),$$

ebben az esetben a második tényező osztható 3-mal. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

II. megoldás.

$$n^3 + 8n = (n^3 - n) + 9n = n(n^2 - 1) + 9n = n(n-1)(n+1) + 9n.$$

Az átalakítás után a kéttagú kifejezés második tagja nyilván osztható 3-mal, az első tagban pedig három szomszédos egész szám szerepel, ezek egyike biztosan osztható 3-mal, így a szorzat is. Mivel két 3-mal osztható szám összege is osztható 3-mal, az állítás igaz.

(*Megjegyzés.* Itt felismerhetjük a „kis Fermat-tétel” $p = 3$-ra vonatkozó esetét: $p \mid n^p - n$, ahol p prímszám, n egész szám.)

III. megoldás: teljes indukcióval. $n = 0$-ra igaz, tegyük fel, hogy n-re igaz, bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$(n+1)^3 + 8(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 8n + 8 =$$
$$= (n^3 + 8n) + 3(n^2 + n + 3).$$

Az első tag az indukciós feltétel miatt osztható 3-mal, a második is osztható 3-mal, így az összeg is.

b) Az egyik prímnek 2-nek kell lennie, különben a bal oldal páros volna, nem lehetne az összeg 2019. Legyen $p = 2$, ekkor $q^n = 2017$. Mivel 2017 prím, így a $q = 2017$, $n = 1$ megoldást kaptuk. Legyen most $q = 2$, ekkor $p = 2019 - 2^n$. Az n értéke legfeljebb 10 lehet, nagyobb n-re p negatív lenne. Az áttekinthetőség kedvéért készítsük el az alábbi táblázatot:

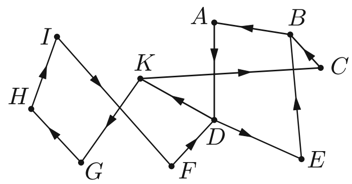
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
p	2017	2015	2011	2003	1987	1955	1891	1763	1507	995
	prím	$5 \cdot 403$	prím	prím	prím	$5 \cdot 391$	$31 \cdot 61$	$41 \cdot 43$	$11 \cdot 137$	$5 \cdot 199$

Megjegyzés. A függvénytáblázat 4000-ig felsorolja a prímeket, célszerű használni, de ha nem, akkor a 2015, 1955, 995 nyilván nem prím, a többiek sem oszthatók 2, 3, 5-tel, elég az osztásokat 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43-mal elvégezni $\left(\sqrt{2019} \approx 44{,}93\right)$, ami „rabszolgamunka”, de viszonylag gyorsan elvégezhető.

A megoldások tehát:

p	q	n
2	2017	1
2017	2	1
2011	2	3
2003	2	4
1987	2	5

c) Ábrázoljuk egy 10 pontú gráffal az egyes helyiségek ajtóval való összeköttetéseit (a kert is helyiség) úgy, hogy a pontokat (helyiségek) ott köti össze él, ahol ajtó van közöttük. A gráfban K és B foka 3, D-é 4, a többié 2.



Olyan útvonalat keresünk, amely minden élet pontosan egyszer érint, ez csak olyan lehet, amelyik K-ból indul és B-ben végződik, vagy fordítva, mert a többi pont páros foka miatt a végén (vagy elején) nem tartózkodhatnánk ott, hiszen az egyik élen érkeztünk, a másikon távoztunk (a D-nél ezt kétszer).

A nappali tehát a B helyiség. Egy lehetséges útvonal: $KCBADKGHIFDEB$ (nyitott Euler-vonal).

8. *Egy kozmetikai cég saját termékét három változatban forgalmazza a hatóanyag töménységétől, a kiszerelés mennyiségétől és a csomagolástól függően. Az A jelű termék* 150 g*-os,* 10% *töménységű; a B jelű* 100 g*-os,* 20% *töménységű; a C jelű* 50 g*-os,* 30% *töménységű. A hatóanyag és az oldószer a termék árában a mennyiségével egyenes arányban jelenik meg; az A és B jelű termék csomagolása kétszer annyiba kerül, mint a C jelű terméké. Az üzletben az A* 2275 Ft*-ba, a B* 2500 Ft*-ba, a C pedig* 1725 Ft*-ba kerül dobozonként.*

a) Mennyi a hatóanyag és az oldószer grammonkénti ára? (*7 pont*)

Anna egyik nap észrevette, hogy az üzlet egyik polcán az A, B, C jelű termékekből annyi van, hogy számuk egy növekvő mértani sorozat három szomszédos elemével egyenlő. A számok átlaga 14*, szórása* $2\sqrt{14}$.

b) Hány termék volt a polcon az egyes fajtákból? (*9 pont*)

Megoldás. *a*) A hatóanyag ára: x Ft/g; az oldószeré y Ft/g; a C jelű termék dobozának ára z.

Az A jelű termékben 15 g hatóanyag és 135 g oldószer van, így az ára: $15x+135y+2z=2275$ (Ft).

A B jelűben 20 g hatóanyag és 80 g oldószer van, ára: $20x+80y+2z=$ $=2500$ (Ft).

A C jelűben 15 g hatóanyag és 35 g oldószer van, ára: $15x+35y+z=$ $=1725$ (Ft).

A harmadik egyenletet szorozzuk meg (-2)-vel, majd adjuk hozzá a másik kettőhöz. Az elsőből: $-15x+65y=-1175\ \ /\cdot 2$; $-30x+130y=-2350$. A másodikból: $-10x+10y=-950\ /\cdot(-3)$; $30x-30y=2850$. Összeadva $100y=500$. Ebből $y=5$, ezt beírva $-10x+50=-950$-be, x-re 100 adódik. A hatóanyag ára 100 Ft, az oldószeré 5 Ft grammonként. (A C termék csomagolása 50, az A és B terméké pedig 100-100 Ft-ba került.)

Ellenőrzéssel győződhetünk meg az eredmények helyességéről.

b) Jelölje a termékek számát $\frac{a}{q}$, a, aq, ahol $0<a$, $1<q$, $a\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Q}$.

$$\frac{\frac{a}{q}+a+aq}{3}=14;\quad a\left(q+\frac{1}{q}\right)=42-a;\quad q+\frac{1}{q}=\frac{42}{a}-1;$$

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}+1;\quad q^2+2+\frac{1}{q^2}=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}+1;$$

$$\text{innen}\quad q^2+\frac{1}{q^2}=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}-1.$$

$$\sqrt{\frac{\left(14-\frac{a}{q}\right)^2+(14-a)^2+(14-aq)^2}{3}}=2\sqrt{14};$$

$$\left(14-\frac{a}{q}\right)^2+(14-a)^2+(14-aq)^2=168;$$

$$196-\frac{28a}{q}+\frac{a^2}{q^2}+196-28a+a^2+196-28aq+a^2q^2=168;$$

$$a^2\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-28a\left(q+\frac{1}{q}\right)+a^2-28a+420=0;$$

$$a^2\left(\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}-1\right)-28a\left(\frac{42}{a}-1\right)+a^2-28a+420=0,$$

$$1764-84a-a^2-1176+28a+a^2-28a+420=0;$$

ebből $1008=84a$, vagyis $a=12$ adódik.

$$q+\frac{1}{q}=\frac{42}{12}-1;\quad q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2};\quad 2q^2-5q+2=0;$$

$$q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}\ \Rightarrow\ q_1=2,\quad q_2=\frac{1}{2};$$

mivel $1 < q$, ezért $q = 2$.

A polcon az A jelűből 6, a B jelűből 12, a C jelűből 24 doboz volt.

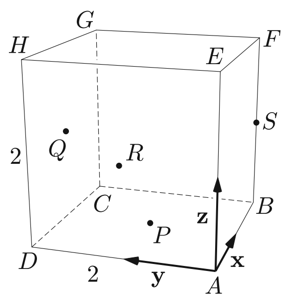
9. *A 2 egység élű $ABCDEFGH$ csúcsú kocka $ABCD$ alaplapjának középpontja P; $DCGH$ oldallapjának középpontja Q; $AEHD$ előlapjának középpontja R; a BF él felezőpontja S. (A-t E-vel, B-t F-fel, C-t G-vel, D-t H-val köti össze él.)*

a) Mekkora az A, P, Q, R, S csúcsú poliéder térfogata? (*8 pont*)

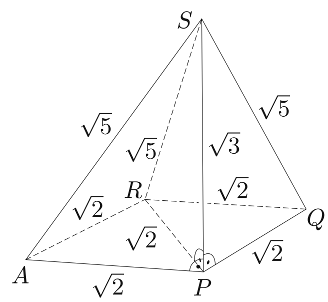
b) Mekkora a poliéderbe írt gömb sugara? (*8 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* A kocka AHC csúcsai egy $2\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszöget alkotnak, amelynek oldalfelező pontjai a P, Q, R pontok (*1. ábra*). Az A, P, Q, R pontok tehát egy síkban vannak, a PQR háromszög és az APR háromszög egy-egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög, ezek együtt adják az $APQR$ rombuszt; így $APQRS$ egy rombusz alapú gúla (*2. ábra*).

Az SQ, SA, SR szakaszok hossza $\sqrt{5}$, mert mindegyikük egy-egy 1 és 2 egység befogójú derékszögű háromszög átfogója. Az SP pedig $\sqrt{3}$ egység hosszú, mert egy egységkocka testátlója.



1. ábra



2. ábra

Az RPS háromszög derékszögű, mert $\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$. Ugyanezért derékszögű az APS és a QPS háromszög is. (Idáig eljuthatunk másként is, lásd az I./*a*) részmegoldást.)

Az SP merőleges az $APQR$ síkra, mert merőleges a sík két egymást metsző egyenesére (a síkra merőleges egyenes tétele), így ez lesz a gúla magassága.

Egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög területe:

$$t = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

a poliéder térfogata tehát:

$$V = \frac{2t\sqrt{3}}{3} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}}{3} = 1 \quad \text{(térfogategység)}.$$

I./a) részmegoldás. Helyezzük el a kockát egy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ egységvektorok által meghatározott derékszögű koordinátarendszerben, itt $\overrightarrow{AP} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\overrightarrow{AR} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\overrightarrow{AQ} = \mathbf{x} + 2\mathbf{y} + \mathbf{z}$,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \mathbf{x} + 2\mathbf{y} + \mathbf{z} - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{z} = \overrightarrow{AR} \ \Rightarrow$$

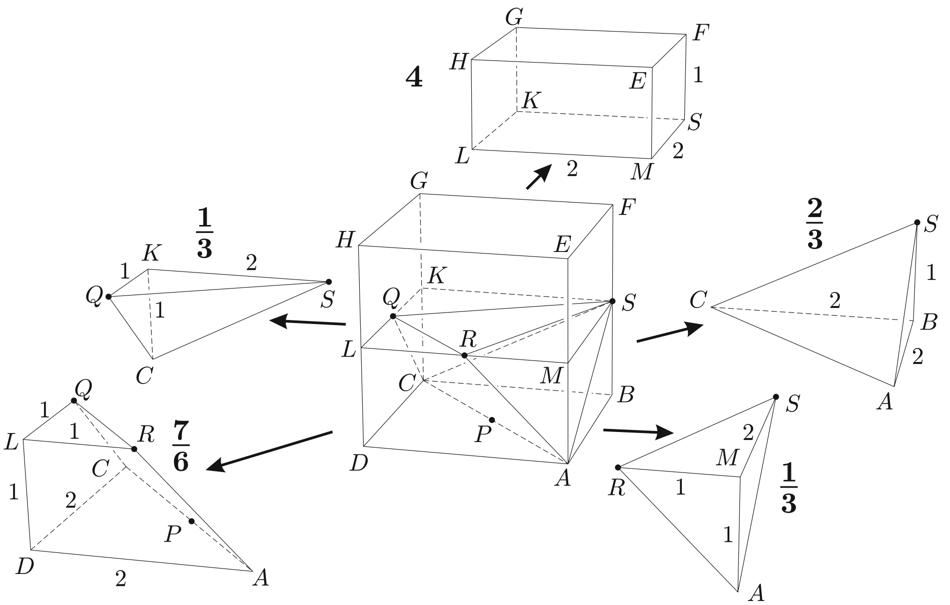
az $APQR$ négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú. Egy vektor hossza koordinátái négyzetösszegének négyzetgyökével egyenlő, így

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AR}| = |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

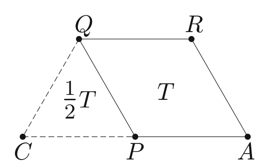
$$\overrightarrow{PS} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z}; \quad |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3};$$

$$|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{QS}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

a) II. megoldás. Megkaphatjuk a poliéder térfogatát úgy is, hogy a kockából levágjuk a megfelelő darabokat az *ábra* szerint.



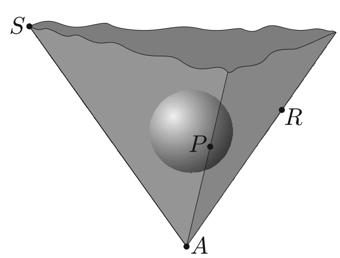
Az egyes darabok térfogatát a melléjük vastagon írt számok mutatják, ezek kiszámítása triviális. A maradék test térfogata a poliéder térfogatának $\frac{3}{2}$-szerese, mert alapjuk között is ez a viszony áll fenn.



Felírhatjuk, hogy $4+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}V=8$. Ebből $V=1$ adódik.

b) Be kell látni, hogy létezik beírt gömb.

Az nyilvánvaló, hogy a poliéder szimmetrikus az RPS síkra, ha van érintő gömb, akkor középpontjának ebben a síkban kell lennie. Vegyük az A pontból induló AP, AS, AR félegyenesek által meghatározott triédert. Síkjainak szögfelező síkjai egy A-ból induló, a triéder belsejében haladó félegyenest határoznak meg, mert síkok metszésvonala egyenes, másrészt az egyenlőség tranzitív, tehát, ha az O pont egyenlő távol van az ASP és ASR síkoktól, akkor az APR síktól is ugyanakkora távolságra van.



Ez a félegyenes döfi az RPS síkot, ez az O pont lesz tehát a beírt gömb középpontja. (Szemléletesen „indokolható” a beírt gömb léte úgy is, hogy egy „szögletes tölcsérbe” beleejthetünk egy pingpong labdát, amit aztán megfelelő méretűre „fújunk” fel.)

A beírt r sugarú gömb középpontját (O) kössük össze a poliéder csúcsaival, így azt az oldallapok alapú, O csúcsú gúlákra daraboltuk fel.

Az ARS háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AR alapja $\sqrt{2}$ hosszú, szárai $\sqrt{5}$ hosszúak, így az alapjához tartozó m magasságra felírhatjuk:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+m^2=\left(\sqrt{5}\right)^2, \quad \text{ahonnan} \quad m=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Az $APQR$ alapú, O csúcsú gúla térfogata $V_1=\frac{\sqrt{3}r}{3}$; az APS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_2=\frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}r}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}r$$

(ekkora a PQS alapú gúláé is); az ARS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_3 = \frac{\frac{\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}r}{3} = \frac{1}{2}r$$

(egyenlő az RQS alapú gúláéval).

Mivel $V_1 + 2V_2 + 2V_3 = V$;

$$\frac{\sqrt{3}}{3}r + 2\frac{\sqrt{6}}{6}r + 2\frac{1}{2}r = 1; \quad r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right) = 1.$$

Ebből

$$r = \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3} = \text{(két lépésben gyöktelenítve a nevezőt)} =$$
$$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0{,}42.$$

(*Megjegyzés.* Minden olyan poliéderre, amelynek van minden lapját érintő beírt gömbje igaz, hogy $\dfrac{Ar}{3} = V$.)