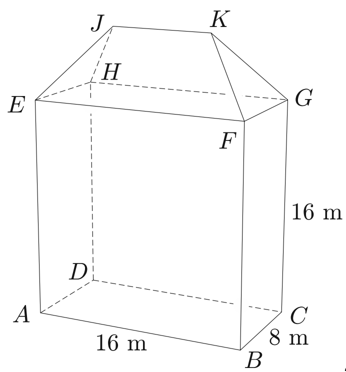
I. rész

1. *a*) A 2, 0, 1, 9 számjegyekből az összes lehetséges módon háromjegyű természetes számokat képeztünk. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a képzett számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak számjegyei különbözők. *(3 pont)*

b) Oldjuk meg a $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ halmazon a $\sin(x+2019\pi)=-\frac{1}{2}$ egyenletet. *(8 pont)*

2. A Regéci Vár egy 1300 körül épült vár, ahol II. Rákóczi Ferenc fejedelem a gyermekkorát töltötte. Az *1. ábrán* ennek a várnak a XIV. századi állapota látható, a *2. ábrán* pedig egy vázlatos képet láthatunk annak tornyáról.

1. ábra



2. ábra

A torony az $ABCDEFGH$ téglatestből és az $EFGHJK$ tetőből áll. A tornyot alkotó téglatest külső méretei: $AB=16$ m, $BC=8$ m és $CG=16$ m.

a) Mekkora az oldalfalak térfogata, ha a fal vastagsága 2 m és az összes faltérfogatot az ablakok, ajtók és lőrések 5%-kal csökkentik? *(4 pont)*

Tudjuk, hogy az $EFGHJK$ tető magassága 5 méter, és az EJH és FKG egyenlő szárú háromszögek síkjai 50°-os szöget zárnak be az $EFGH$ síkkal.

b) Mekkora a JK szakasz hossza? *(5 pont)*

A vár 2018-as rekonstrukciója során gimnazisták több napon keresztül segítették a régészek munkáját. A diákok 60%-a ásásban, 30%-a feltárásban, és 45%-a talicskázásban segített. Egyféle munkát 29-en végeztek, pontosan kétféle munkafolyamatban a tanulók $\frac{1}{5}$ része, mindháromban pedig 7,5%-a vett részt.

c) Hány tanuló vett részt összesen a munkálatokban? *(3 pont)*

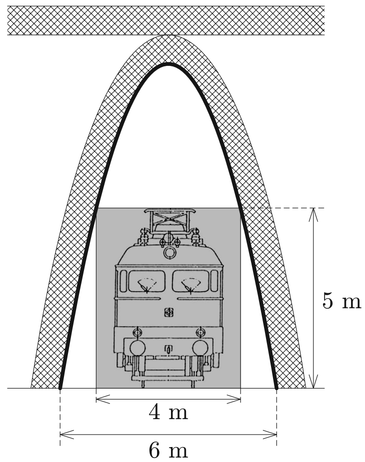
3. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\log_2 x \le \log_{\frac{1}{2}}(4x) \qquad (7\ pont)$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y nemnegatív valós számok.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x}-\sqrt{y}&=8,\\ \sqrt{xy}&=33.\end{aligned}\right\} \qquad (7\ pont)$$

4. A vasúti szaknyelvben űrszelvénynek nevezik a szerelvények akadálytalan áthaladásához szükséges térnek a vágányokra merőleges keresztmetszetét. A nemzetközi szabványok szerint az űrszelvény jellemzően 4 m széles és 5 m magas. Az alakja általában követi a szerelvény alakját, de az egyszerűség kedvéért ez legyen most az ábrán szürkével jelzett téglalap. A vasút egy olyan híd alatt halad át, amelynek acél tartószerkezete parabolaív alakú. A tartószerkezet belső íve (az *ábrán* vastag fekete vonallal) a sínek szintjén 6 m széles és éppen nem lóg be az űrszelvénybe.



a) Milyen magas a híd tartószerkezete a belső ívének középső, legmagasabb pontján? (*8 pont*)

A vasútvonal áthalad egy olyan 24 méter hosszú, egyenes alagúton is, amelynek keresztmetszete parabolaszelet alakú. A parabolaszeletet a koordináta-rendszerben megadott

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

egyenletű parabola és az x tengely határolja. A koordináta-rendszerben 1 egység 1 métert jelent.

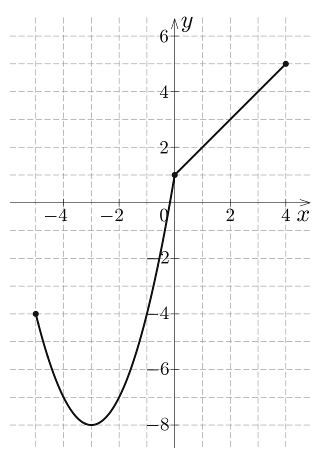
b) Hány m^3 követ kellett kitermelni az alagút építése közben? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

II. rész

5. *a*) Határozzuk meg azt a legkisebb, különböző számjegyekből álló 6-jegyű természetes számot, amely a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből áll és osztható 12-vel. (*5 pont*)

b) A $\{0;1;2;3;4;5\}$ halmaznak hány részhalmaza tartalmaz legalább 1 db páratlan számot? (*3 pont*)

c) Adjuk meg az *ábrán* látható függvény hozzárendelési szabályát, és számítsuk ki a függvény $E(-1;-4)$ pontjában húzott érintőjének meredekségét. (*8 pont*)



6. Tekintsük az $a_n = n^2 + 2$ sorozatot.

a) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ határértéket. Válaszunkat indokoljuk. (*2 pont*)

b) Számítsuk ki az (a_n) sorozat első száz tagjának összegét. (*4 pont*)

Az (a_n) sorozat egymást követő tagjai segítségével a $b_n = a_{n+1} - a_n$ sorozatot képeztük.

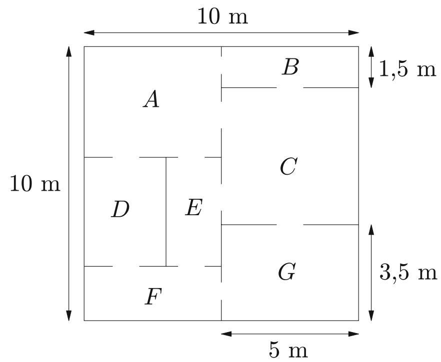
c) Igazoljuk, hogy a (b_n) sorozat számtani sorozat. (*3 pont*)

d) Igazoljuk teljes indukcióval, hogy az (a_n) sorozat $a_1 = 3$ és $n > 1$ esetén megadható az

$$a_n = \left(1 + \frac{2n-1}{n^2-2n+3}\right) \cdot a_{n-1}$$

rekurzióval is. (*7 pont*)

7. Az *ábrán* egy családi ház földszintjének alaprajza látható a benne lévő hét helyiséggel és az ajtókkal együtt. A rajzon feltüntettük a földszint és néhány helyiség méretét is. (A földszinti bejárati ajtó nem szerepel az ábrán, mert a megoldáshoz az nem szükséges.)



a) A házban lévő helyiségeket és az ajtókat egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A, B, C, D, E, F, G) a helyiségeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő helyiség között van ajtó. Rajzoljuk fel a családi ház földszintjének gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozzuk meg a felrajzolt gráfban a fokszámok összegét. (*3 pont*)

A lakás fölött a földszinttel megegyező méretű padlás, a ház alapterületének negyede alatt pince is van. A család macskája a pince padlóján fele olyan szívesen, a padláson viszont kétszer olyan szívesen van, mint a földszinten.

b) Mekkora valószínűséggel fekszik a macska a C jelű szobában? (*8 pont*)

c) Legalább hány élt kell kitörölni egy 7 csúcsú teljes gráfból ahhoz, hogy az már ne legyen összefüggő? Állításunkat igazoljuk. (*5 pont*)

8. Az alábbi *táblázat* hazánk napsütéses óráinak átlagos mennyiségét mutatja órában mérve az egyes évszakokban.

Tavasz	Nyár	Ősz	Tél
575,2	845,7	403	180,1

a) Határozzuk meg a napsütéses órák mennyiségének átlagát és szórását. (*4 pont*)

Az *ábrán* látható napóra egy magyar városban található. A napóra mutatójának hossza 60 cm, északi irányba áll és a vízszintes talapzattal 60°-os szöget zár be. A tavaszi nap-éj egyenlőség idején (2018. március 20-án) a Nap delelési magassága 42° volt. A Nap delelési magasságán a Nap irányába mutató félegyenesnek a vízszintessel bezárt szögét értjük.

b) Milyen hosszú volt ekkor a napóra mutatójának árnyéka a vízszintes alaplapon? (*5 pont*)

A napóra felületének koszolódását úgy szeretnék csökkenteni, hogy talapzatra helyezik a napórát. A talapzat egy olyan téglatest alakú betontömb, amelynek fedőlapját és oldallapjait 2 cm vastag márványlappal borítják be. A márvánnyal beborított betontömb alaplapja 1 m oldalhosszúságú négyzet, magassága 80 cm. A márványbevonat készítése közben a megvásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz.

c) Mennyibe kerül a betontömb beborításához szükséges márvány, ha 1 m^3 2 cm vastag márványlap ára 540 000 Ft? Válaszunkat *tízezer* forintra kerekítve adjuk meg. (*7 pont*)

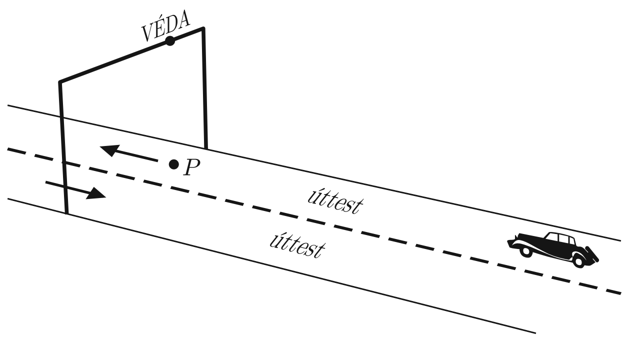
9. Az alábbi táblázatban a gyorshajtás miatt bekövetkezett halálos közúti balesetek száma látható a Nyugat-Dunántúlon 2010-től 2018-ig a megadott időszakban.

Halálos közúti balesetek száma 2010-től 2018-ig 01.01-től 02.28-ig (Nyugat-Dunántúl)

Év	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Balesetek száma	9	8	12	7	18	14	15	12	8

a) Határozzuk meg a balesetek számának mediánját és terjedelmét. (*3 pont*)

Hazánkban a rendőrség rendszámtábla alapján azonosítja a gyorshajtókat. Egy sebességmérés alkalmával az úttesten szabályosan közlekedő autós éppen szemben van a mérést végző készülékkel, amit VÉDÁ-nak hívnak. A 6,5 m magas állványra szerelt sebességmérő berendezésből 15°-os lehajlási szögben érkezik az úttestre a lézernyaláb.
(A lézernyaláb szélességétől az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el.)



b) Érzékeli-e a sebességmérő berendezés az ebben a pillanatban a P ponttól 40 m távolságban az úttest közepén a VÉDA irányába közlekedő személyautót? (*4 pont*)

Egy biztosító honlapján a következőket olvashatjuk:
„Az autóbiztosítással rendelkező ügyfeleink 65 százalékát férfiak, 35 százalékát nők teszik ki. Balesetek szempontjából a férfiak a károkozók 69 százalékát teszik ki. Úgy tűnik, a hölgyek biztonságosabban vezetnek, ugyanis a károkozók körében csak 31 százalékos az arányuk.”
c) Vizsgáljuk meg, hogy (a leírtak alapján) az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége. (*9 pont*)
I. Ha hölgy vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.
II. Ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.