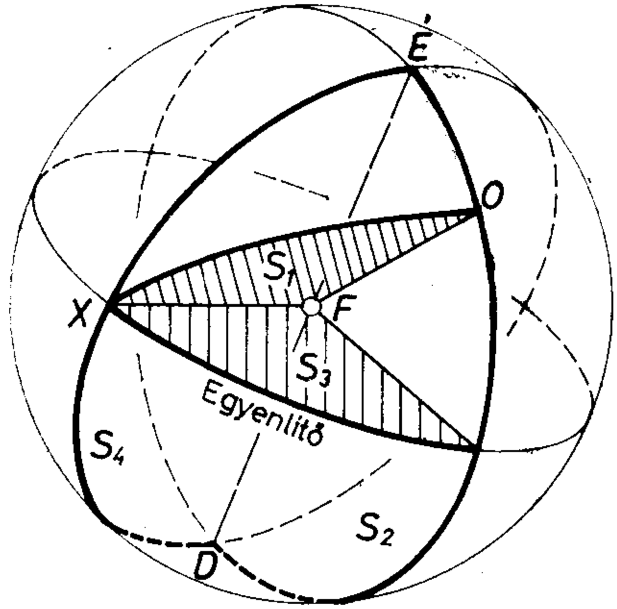
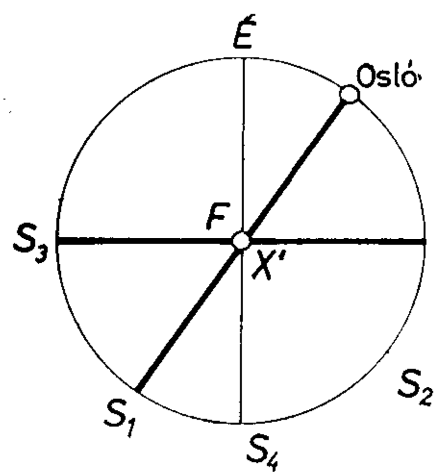
A legrövidebb útvonalon való repülés azt jelenti, hogy a mozgás pályája – az a földi vonal, amely fölött a gép haladt – a gömbnek tekintett Földön az a *főkör*, amelyet az OXF sík metsz ki (jelöl ki) a felületből; itt O Osló városát, F pedig a Föld középpontját jelöli. Ugyanis a gömbön a távolságot az FO és FX sugarak közti szöggel mérjük, és így $OX = R \cdot \varphi$, ahol $\varphi = OFX\sphericalangle$, radiánban értve, és R a Föld sugara (1 ábra).



1. ábra

Az OFX főkör S_1 síkját az O, F pontok mellett az határozza meg, hogy a repülőgép nyugati irányban indult el, vagyis merőlegesen az észak-déli irányra, az Oslót az $\acute{E}$ Északi sarkkal összekötő délkörre, tehát az ezt tartalmazó $O\acute{E}F = S_2$ síkra is merőlegesen. Így a pályasík is merőleges S_2-re, hiszen az Osló-beli sebességvektor (és érintő) is S_1-ben van, és ha egy sík tartalmaz egy olyan egyenest, amely merőleges egy másik síkra, akkor a két sík merőleges egymásra.

Továbbmenve azt jelenti ez, hogy S_1-nek az S_2-re való vetülete egyenes vonal. Mivel pedig F is az S_1-ben van és S_2-n való vetülete önmaga, ezért a repülőgép pályájának a vetülete rajta van az S_2-beli délkörnek O-ból induló átmérőjén (2. ábra).



2. ábra

Merőleges S_2-re az X-et tartalmazó Egyenlítő S_3 síkja is, hiszen értelmezése szerint merőleges a Föld $\acute{E}F$ tengelyére és átmegy F-en; így az Egyenlítő vetülete az Osló-i délkörnek $\acute{E}F$-re merőleges átmérője. Ezen is, OF-en is rajta van X-nek X' vetülete, ezért X' azonos F-fel, tehát az XF földsugár merőleges S_2-re.

Ez pedig azt jelenti, hogy az X város $X\acute{E}F(= S_4)$ meridiánsíkja merőleges Osló meridiansíkjára, ahhoz képest $90°$-kal van elfordulva nyugat felé, tehát X nyugati hosszúsága $|10° \; 43' - 90°| = 79° \; 17'$. Az Egyenlítőnek ez a pontja **Quito** – Ecuador állam fővárosa – közelében van.

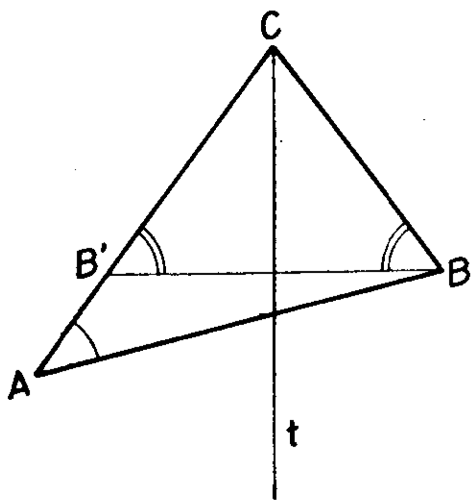
Megjegyzések. 1. A válaszhoz nem volt szükség Osló földrajzi szélességére, eszerint ugyanez volna a válasz, ha Osló helyett meridiánjának bármely más pontját mondtuk volna, Lübeck-et, Augsburgot vagy az Angolá-hoz tartozó Cabindá-t, stb.

2. Ha adottak a síkon a P_0, P_1, $P_2, \ldots, P_{n-1}$, P_n pontok, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján belátható, hogy a P_0P_n szakasz hossza nem lehet nagyobb a P_0P_1, $P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$, szakaszok hosszának összegénél. Ezért mondjuk azt, hogy két pont között legrövidebb út az egyenes. Aki itt arra gondol, hogy amikor a P_{i-1}, P_i pontokat szakaszokkal kötöttük össze, már burkoltan felhasználtuk az állítást, egészítse ki az állítást azzal, hogy az egyenes a csupa (és véges sok) egyenes darabból álló utak közt a legrövidebb. Akinek pedig ez kevés, gondoljon arra, hogy ha másféle utakra is ki akarja terjeszteni az állítást, akkor azoknak előbb definiálnia kell a hosszát. És amitől szabadulni szeretne, ismét visszatér, a görbék hosszát hozzájuk simuló törött vonalakkal szokás közelíteni.

Ezeket kell szem előtt tartania annak, aki a gömbön keresi két pont között a legrövidebb utat. Mondhatjuk azt, hogy két pont által meghatározott „szakasz"-nak a két ponton átmenő főkör rövidebb ívét tekintjük – ha a két pont nem átellenes pontja a gömbnek. (Ha a pontok átellenesek, akkor nem definiáljuk a köztük futó „szakasz"-t.)

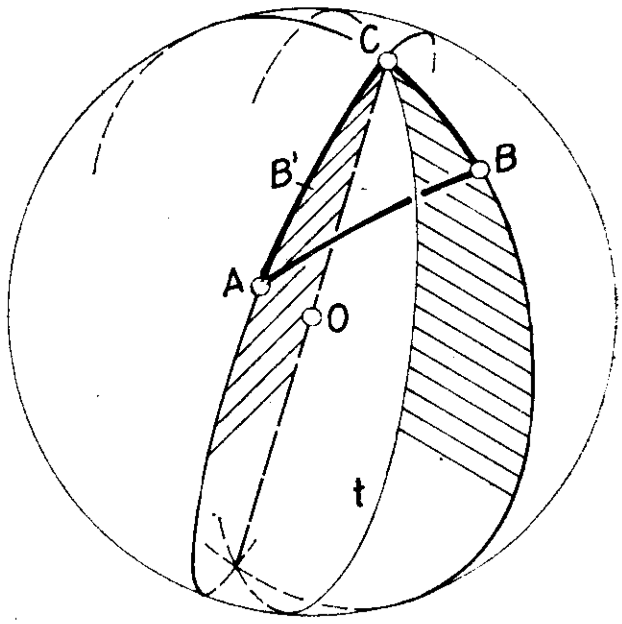
Vizsgáljuk meg, átvihető-e erre az esetre a síkbeli állítás. A pontok száma lépésről lépésre redukálható kettőre, ha már $n = 2$ mellett beláttuk az állítást. Ez maga a háromszög-egyenlőtlenség, ami viszont arra vezethető vissza, hogy a háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van. Enyhe keveredésre vezet, hogy most a háromszögek oldalai is tulajdonképpen szögek, körívek, a háromszögek szögei pedig az oldalakhoz tartozó síkok szögei, ami ráadásul még nehezen is látható a térben. De talán éppen ezért lehet hasznos gyakorlat végiggondolni, mi menthető át a síkbeli háromszögek geometriájából a gömbi geometriába. Aki ezt teszi, tapasztalni fogja, hogy kényelmesebb általánosítani a bizonyítandó tételeket, és azt megmutatni, hogy levezethetőek egymásból anélkül, hogy a bennük szereplő fogalmak konkrét tartalmára hivatkoznánk, és az egyes geometriai elemek tulajdonságai közül többet használnánk fel, mint amit épp a szóban forgó tételek biztosítanak.

A síkbeli háromszög-egyenlőtlenségeket a szögfelezőre való tükrözéssel láthatjuk be: ha $AC > BC$, akkor a C-beli t szögfelezőre tükrözve B-t, az az AC szakaszra kerül.



3. ábra

Ha B új helyzetét B'-vel jelöljük, akkor már csak azt kell felhasználni, hogy az ABB' háromszög B'-beli külső szöge nagyobb az A-beli belső szögnél. A térben t-nek az AC, BC „oldalakat" tartó félsíkok közti t szögfelező sík felel meg, B-t erre tükrözve valóban az AC ív belső B' pontját kapjuk.



4. ábra

Marad tehát annak eldöntése, hogy a külső szögre vonatkozó állítás igaz-e. Síkban több is igaz: a külső szög egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével, a szögek összege 180°. Ez viszont a gömbön már egyáltalán nem igaz: „kicsi", síkszerű gömbi háromszögeknél még nem nagy az eltérés, dehát csak az átellenes párokat zártuk eddig ki. Érezhetően a párhuzamosok okozzák a zűrzavart, vagyis az, hogy a „szakasz"-ainkat tartó „egyenes"-ek két pontban is metszik egymást (3–4. ábra).

Ez az a pont, ahol most abbahagyjuk a kérdés vizsgálatát. Talán hasznosabb, ha újabb feladatokat tűzünk ki a gömbi geometriával kapcsolatban.