

# A 2019. évi Kunfalvi Rezső olimpiai válogatóverseny elméleti feladatai<sup>1</sup>

## 1. Buborékok képződése és mozgása pezsgőben

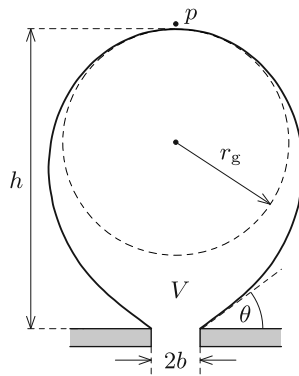
Szilveszteri koccintásakor megfigyelhetjük, hogy a pezsgőben buborékfonalak alakulnak ki, azaz a buborékok a pohár aljának vagy oldalfalának bizonyos pontjairól indulva libasorban emelkednek a felszín felé. A buborékok képződésének oka, hogy a pezsgő előállításakor az italt nagy (2-5 atmoszféra) nyomás alatt szén-dioxiddal telítik, ami légköri nyomáson túltelített oldatot eredményez, így a CO<sub>2</sub> gáz formájában fokozatosan kiválik a folyadékból. Ez a kiválás a pohár belső falának mikroszkopikus egyenetlenségeinél, szennyeződéseinél történik meg legnagyobb valószínűséggel, ezek az ún. nukleációs magvak. Ha egy buborékkezdemény már kialakult, akkor a gáz-folyadék határfelületen tovább folytatódik a CO<sub>2</sub> kiválása egészen addig, amíg a buborék olyan nagyra hízik, hogy nagy része leválik a magról. Ekkor csak egy apró buborékkezdeményt hagy maga után, amely szintén növekedésnek indul.

Ebben a feladatban a buborékok leválásának és emelkedő mozgásának leírásával foglalkozunk egy olyan egyszerű modell segítségével, amely bizonyos feltételek mellett a részletes számolások és kísérletek szerint is jól közelíti a valóságot.

### 1.A. Buborékok képződése és leválása

Tegyük fel, hogy a pohár alján lévő egyik nukleációs mag egy kicsiny,  $b$  sugarú, kör alakú bemélyedés, amelyen *lassan* egy buborék fejlődik (1. ábra). Egy adott pillanatban a buborék térfogata  $V$ , magassága  $h$ , görbületi sugara a legfelső pontjában  $r_g$ , illeszkedési szöge a pohár aljához képest  $\theta$ . A folyadék nyomása közvetlenül a buborék tetejénél  $p$ .

A buborékra a folyadék hidrosztatikai nyomásától származó  $F_1$  erő, a bezárt CO<sub>2</sub>-gáz nyomásából származó  $F_2$  erő, illetve a bemélyedésnél ható, felületi feszültségből származó  $F_3$  erő hat.



1. ábra

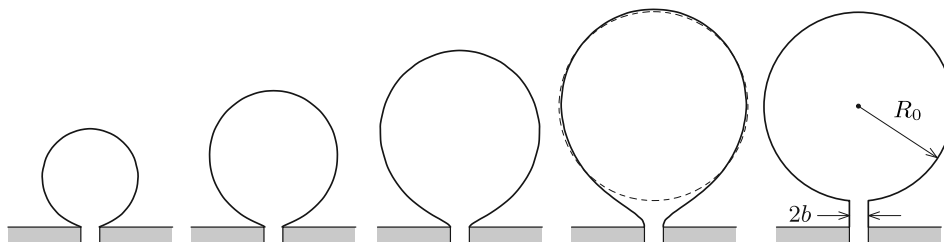
**1.A.1.** Fejezzük ki az  $F_1$  erőt a folyadék (pezsgő)  $\rho$  sűrűsége, a  $g$  nehézségi gyorsulás, valamint az 1. ábrán feltüntetett mennyiségek segítségével!

**1.A.2.** Fejezzük ki az  $F_2$  erőt a folyadék  $\sigma$  felületi feszültsége és az 1. ábrán látható mennyiségek segítségével!

**1.A.3.** Adjuk meg az  $F_3$  erőt a  $\sigma$  felületi feszültség és az 1. ábrán látható paraméterek segítségével!

**1.A.4.** Az előző alkérdésekre kapott eredmények felhasználásával írjuk fel a buborék egyensúlyát kifejező egyenletet!

A buborék alakját a hidrosztatikai nyomásból és a felületi feszültségből származó erők együttesen határozzák meg. Ha a buborék mérete sokkal kisebb egy bizonyos  $\kappa$  hosszúságnál, akkor a buborék nagy része (egy vékony „nyaktól” eltekintve) jó közelítéssel gömb alakú marad még a nukleációs magról való leszakadáskor is, ahogy az a 2. ábra első négy rajzán látható.



2. ábra

<sup>1</sup> A versenyt a nemzetközi diákolimpiához hasonló körülmények között Budapesten rendezték meg 2019 márciusában. A feladatokat Vigh Máté állította össze.

**1.A.5.** Adjunk becslést  $\kappa$  értékére a pezsgő  $\rho$  sűrűsége, a  $g$  nehézségi gyorsulás és a  $\sigma$  feszültség segítségével! (Feltehetjük, hogy a  $\text{CO}_2$  gáz sűrűsége jóval kisebb a folyadék sűrűségénél.)

A továbbiakban tegyük fel, hogy a buborék mérete sokkal kisebb, mint  $\kappa$ ! Ekkor a buborék alakja a leválás pillanatában egy  $R_0$  sugarú gömbbel és a hozzá csatlakozó  $b$  sugarú, henger alakú, vékony ( $b \ll R_0$ ), rövid nyakkal modellezhető (lásd a 2. ábra utolsó rajzát).

**1.A.6.** Fejezzük ki a bemélyedés (és a buborék nyakának)  $b$  sugarát az éppen leváló buborék  $R_0$  sugara, valamint  $\rho$ ,  $g$  és  $\sigma$  segítségével! Használjuk fel, hogy  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ , ha  $|\varepsilon| \ll 1$ .

**1.A.7.** Számítsuk ki az éppen leváló buborék  $R_0$  sugarát, ha  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $\sigma = 50 \text{ mN/m}$  és  $b = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$ .

### 1.B. Buborékok felszálló mozgásának leírása

A buborék belsejében lévő szén-dioxid mennyisége a nukleációs magról történő leválás után tovább növekszik. Ennek üteme jó közelítéssel arányos a buborék falának  $A$  felszínével:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \gamma A,$$

ahol  $\gamma$  egy állandó,  $\Delta N$  pedig a kicsiny  $\Delta t$  idő alatt a folyadékból kiváló  $\text{CO}_2$ -molekulák száma.

A feladat következő részében tételezzük fel, hogy a pezsgő (és a benne lévő buborék) hőmérséklete mindvégig az ideális  $T = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ , a buborék jó közelítéssel gömb alakú marad, a légköri nyomás értéke pedig  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ .

**1.B.1.** Adjuk meg a buborék  $R(t)$  sugarát a leválás után  $t$  idő elteltével  $R_0$ ,  $\gamma$ ,  $T$ ,  $p_0$  és univerzális állandó(k) felhasználásával!

A felfelé mozgó buborékra a hidrosztatikai felhajtóerő és a  $v$  sebességgel arányos nagyságú ún. Stokes-féle közegellenállási erő hat:  $F_{\text{Stokes}} = 6\pi R\eta v$ , ahol  $R$  a buborék pillanatnyi sugara,  $\eta$  pedig a folyadék belső súrlódását jellemző ún. viszkozitás.

**1.B.2.** Adjuk meg a buborék  $v(t)$  sebességét a leválás után  $t$  idő elteltével  $R_0$ ,  $\gamma$ ,  $T$ ,  $p_0$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\eta$  és univerzális állandó(k) felhasználásával!

A pohárban  $H = 10 \text{ cm}$  magasan áll a pezsgő. A pohár aljáról induló buborék  $t_0 = 1,2 \text{ s}$  alatt éri el a felszínt. A pezsgő viszkozitása  $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Ha az **1.A.7.** alkérdésben nem sikerült meghatározni a leváló buborék  $R_0$  sugarát, akkor azt vegyük  $R_0 = 0,16 \text{ mm}$ -nek!

**1.B.3.** Mekkora a buborék  $R(t_0)$  sugara, amikor eléri a felszínt? Adjuk meg a sugár számszerű értékét is!

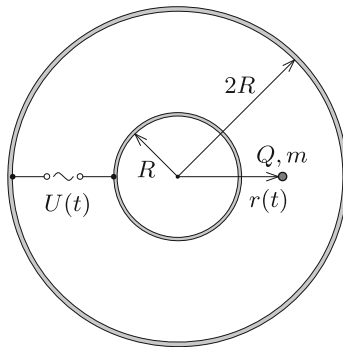
*Matematikai segítség:* Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)} + \text{konstans.}$$

### 2. Ponttöltés mozgása oszcilláló elektromos térben

Egy gömbkondenzátor két koncentrikus,  $R$  és  $2R$  sugarú, igen jól vezető fémgömbhéjből áll; a gömbök közötti térben vákuum van. A kondenzátor fegyverzei közé egy váltóáramú feszültségforrást helyezünk, amit egy-egy sugárirányú, egyenes vezetékkel csatlakoztatunk a gömbökhöz (3. ábra). A gömbökre kapcsolt feszültség  $U(t) = U_0 \cos \omega t$  módon változik az idő függvényében.

**2.1.** Határozzuk meg a gömbkondenzátor kapacitását! A választ  $R$  és univerzális állandó(k) segítségével adjuk meg!



3. ábra

Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája nem túl magas, a kondenzátor feszültsége (az igen jól vezető gömbök miatt) „követi” a feszültségforrást, a fáziskésés lényegében zérus (ez a kvázisztatikus eset). Ha azonban a váltakozó feszültség  $\omega$  körfrekvenciája megközelít egy bizonyos  $\omega_1$  értéket, akkor a rendszer induktív ellenállása számottevő lesz, így a kvázisztatikus közelítés nem alkalmazható.

**2.2.** Adjunk nagyságrendi becslést  $\omega_1$  értékére, ha  $R = 10 \text{ cm}$ . Ismert továbbá, hogy a vákuum dielektromos állandója  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ , permeabilitása  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs}/(\text{Am})$ .

A továbbiakban tegyük fel, hogy  $\omega \ll \omega_1$ ! A gömbök közötti térben, a feszültségforrással átellenes oldalon egy  $+Q$  töltésű,  $m$  tömegű kis porszem található. Feltételezhetjük, hogy a porszemre ható nehézségi erő hatása a feladat során végig elhanyagolható. Jelöljük a porszem gömbök középpontjától mért távolságát  $r$ -rel! Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája sokkal nagyobb egy bizonyos  $\omega_2$  értéknél, akkor a gyöngy mozgása felbontható egy lassú, sodródó mozgásra és egy körül gyorsan oszcilláló, kis  $A(t)$  amplitúdójú rezgőmozgásra:  $r(t) = r_0(t) + A(t) \cos \omega t$ , ahol  $A(t) \ll r_0(t)$ , valamint  $A(t)$  és  $r_0(t)$  lassan változó függvények. Ez azt jelenti, hogy teljesülnek az  $\ddot{r}_0(t)$ ,  $\dot{A}(t)\omega \ll A(t)\omega^2$  relációk (a mennyiség fölé tett pont és kettőspont az első és második idő szerinti deriváltat jelöli).

**2.3.** Adjunk nagyságrendi becslést  $\omega_2$  értékére  $m$ ,  $Q$ ,  $R$  és  $U_0$  segítségével! Számítsuk ki  $\omega_2$  becsült értékét  $R = 10$  cm,  $m = 10^{-16}$  kg,  $Q = 1,6 \cdot 10^{-12}$  C,  $U_0 = 1,0$  V esetén!

A következő feladatokban tegyük fel, hogy  $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_1$ ! A porszem gyorsulása az

$$(2.1) \quad \ddot{r}(t) = \frac{\alpha}{r(t)^2} \cos \omega t$$

egyenlet szerint változik az idő függvényében, ahol  $\alpha$  állandó paraméter.

**2.4.** Fejezzük ki az  $\alpha$  paraméter értékét  $m$ ,  $Q$ ,  $R$  és  $U_0$  segítségével!

**2.5.** Az említett közelítések segítségével adjuk meg a gyors oszcilláció  $A(t)$  amplitúdóját  $\alpha$ ,  $r_0(t)$  és  $\omega$  felhasználásával!

A (2.1) egyenlet egy periódusidőre vett átlagolásával összefüggést állapíthatunk meg a porszem lassú, sodródó mozgását leíró  $r_0(t)$  függvény és annak  $\ddot{r}_0(t)$  gyorsulása között. A lassan változó mennyiségek –  $A(t)$  és  $r_0(t)$  – egy periódus alatt alig változnak, így az időátlagolás során állandónak vehetők.

**2.6.** Az eddig használt közelítéseket és a 2.5. alkérdés eredményét felhasználva fejezzük ki a lassan sodródó mozgás  $\ddot{r}_0(t)$  gyorsulását  $r_0(t)$ ,  $\alpha$  és  $\omega$  segítségével!

**2.7.** Feltételezve, hogy a  $t = 0$  időpillanatban a porszem a kisebb fémgömb felületének közeléből indult, határozzuk meg, mekkora sodródási sebességgel ér el a porszem a nagyobb gömbhöz! Az eredményt  $m$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $U_0$  és  $\omega$  segítségével adjuk meg!

Matematikai segítség: Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{konstans.}$$

**2.8.** Adjuk meg a porszem sodródási sebességének számszerű értékét akkor, amikor eléri a nagy gömböt! Legyen  $\omega = 2 \cdot 10^5$  1/s,  $R = 10$  cm,  $m = 10^{-16}$  kg,  $Q = 1,6 \cdot 10^{-12}$  C,  $U_0 = 1,0$  V!

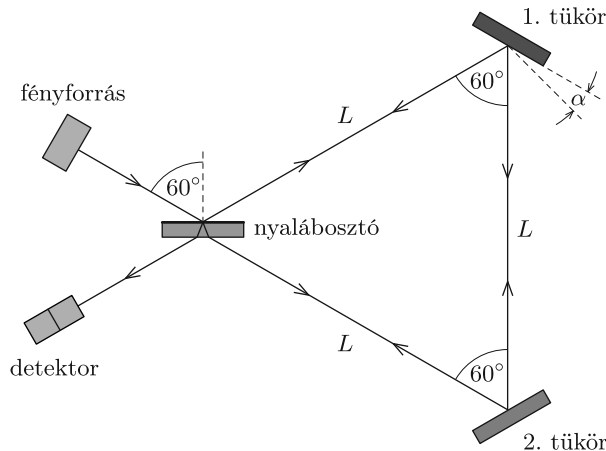
### 3. Száloptikás giroszkóp

A mechanikus giroszkóp a pörgettyű elvén működő eszköz, amelynek lelke egy olyan lendkerék, amelynek szimmetriatengelye a háromtengelyű felfüggesztésnek köszönhetően szabadon el tud fordulni. A felpörgetett kerék a perdületmegmaradás miatt a felfüggesztés mozgatásakor is megőrzi eredeti forgástengelyét, így alkalmas irányok megtartására és szögsebességmérésre is.

A száloptikás giroszkóp csak a felhasználási módjában hasonlít a mechanikus giroszkópra, hiszen ez is alkalmas egy forgó koordináta-rendszer szögsebességének meghatározására. Az eszköz lényegében egy ún. Sagnac-féle interferométer száloptikás változata, amelyben az interferáló fényhullámok fáziskülönbsége függ a koordináta-rendszerrel együtt forgó eszköz szögsebességétől. Ez a feladat a száloptikás giroszkóp működési elvével foglalkozik.

#### 3.A. A Sagnac-féle interferométer

A Sagnac-féle interferométer egyik változatát a 4. ábra mutatja. Ez az eszköz két ideális síktükörből és egy nyalábosztóból áll, amelyek egy  $L$  oldalú szabályos háromszög alakjában vannak elrendezve. A nyalábosztóra  $60^\circ$ -os beesési szögben  $I_0$  intenzitású,  $\lambda$  hullámhosszúságú monokromatikus síkhullám esik a fényforrásból. A nyalábosztó egy dielektromos (szigetelő) anyagból készült vékony plánparallel lemez, amelynek felső lapja féligáteresztő tükörként viselkedik, azaz a rá eső fény intenzitásának felét visszaveri, másik felét pedig átengedi. A nyalábosztó alsó lapja egy vékony bevonatnak köszönhetően nem tükröző.



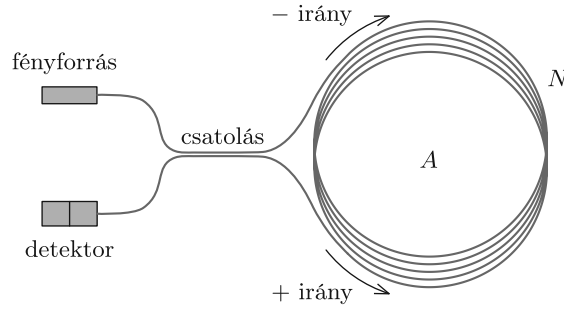
A nyalábosztón való áthaladás után a fény az óramutató járásával megegyező, és azzal ellentétes irányban is végigpattog a tükrökön, míg végül mindkét hullám újra a nyalábosztóhoz érkezik. Itt a hullámok ismét kettéválnak fele-fele intenzitásarányban, így a hullámok egy része a fényforrásba visszajutva egyesül, másik része pedig (egymással interferálva) a detektorba jut.

**3.A.1.** Az interferométer alaphelyzetében mekkora intenzitást mér a detektor, és mekkora intenzitású fény jut vissza a fényforrásba?

**3.A.2.** Az interferométer 1. tükrét kicsiny  $\alpha$  szöggel elforgatjuk a 4. ábrán látható módon. Változik-e, és ha igen, hogyan változik a detektor által mért intenzitás  $\alpha$  függvényében?

### 3.B. A száloptikás Sagnac-féle interferométer, mint giroszkóp

A 4. ábrán bemutatott interferométert optikai szálak segítségével is meg lehet valósítani (5. ábra). Az optikai szálak fényvezető magjának törésmutatójáról tételezzük fel, hogy 1-hez közeli érték. A használt fény hullámhossza  $\lambda$ , a fényforrásból kiinduló intenzitás a szálban  $I_0$ . Az egyenlő intenzitású nyalábosztást két optikai szál közötti csatolással valósítják meg: ha a két szál fényvezető magja elég közel helyezkedik el egymáshoz, az elektromágneses hullám „átcsatolódhat” az egyik szálból a másikba. Ha a csatoláshoz egy bejövő hullám érkezik, akkor a két továbbhaladó hullám egymáshoz viszonyított fáziskülönbsége  $\pi/2$  lesz. A fényforrás felől érkező nyaláb két fele az óramutató járásával azonos (–), illetve azzal ellentétes (+) irányban halad végig  $N$  darab, egyenként  $A$  területű hurkon, míg a csatoláson újra áthaladva a detektorba, valamint a fényforrásba jut.



5. ábra

Ha az 5. ábrán látható interferométert a kör alakú hurkok középpontja körül  $\Omega$  szögsebességgel megforgatjuk, akkor a + és – irányba haladó hullámok hullámhossza a Doppler-effektus miatt kicsit megváltozik. Így a detektor által mért intenzitás  $\Omega$  függvénye lesz.

**3.B.1.** Határozzuk meg a + és – irányba terjedő hullámok  $\phi$  fáziskülönbségét, amikor a detektorba érnek! A választ  $\lambda$ ,  $A$ ,  $N$  és  $\Omega$  univerzális állandó( $k$ ) segítségével adjuk meg!

**3.B.2.** Adjuk meg a detektor által mért intenzitást a + és – irányba terjedő hullámok  $\phi$  fáziskülönbsége és  $I_0$  segítségével!

**3.B.3.** Egy tipikus száloptikás giroszkópban 200 m hosszú optikai szál van feltekerve egy  $d = 10$  cm átmérőjű, függőleges tengelyű csévetestre. Mekkora fáziskülönbséget mérhetünk a két nyaláb között Budapesten a Föld forgása miatt? (Budapest földrajzi szélessége kb.  $47^\circ$ .)