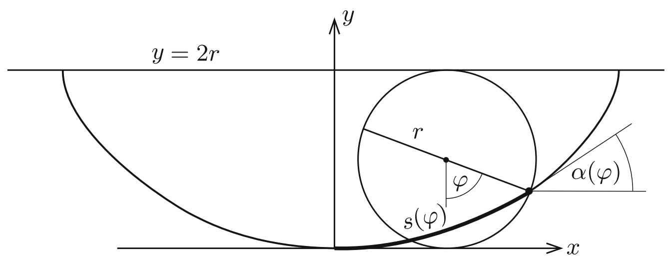
A Huygens-féle cikloisinga

Bevezetés

Köztudott, hogy az ℓ hosszúságú matematikai inga lengésideje nem független a lengés amplitúdójától, és a $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ kifejezés tulajdonképpen egy közelítés, ami annál pontosabb, minél kisebb az amplitúdó. Természetes módon vetődik fel a kérdés: hogyan lehet olyan ingát készíteni, amelynek az amplitúdótól függetlenül ez a lengésideje. Erre a kérdésre adott választ *Christiaan Huygens* (1629–1695) holland matematikus, fizikus, csillagász, és az alábbiakban az általa konstruált szerkezetet mutatjuk be. A kérdést két részre bontva tárgyaljuk. Mivel az egyszerű inga esetében a lengésidő amplitúdófüggése onnan ered, hogy az s kitérés és a hozzá tartozó $mg\sin(s/\ell)$ visszatérítő erő csak közelítőleg arányosak egymással, először azt vizsgáljuk meg, milyen alakú kényszerpályán kell egy testnek haladni ahhoz, hogy a gravitációs erő pálya menti komponense arányos legyen a pálya mentén mérhető úttal. Ezután megnézzük, hogyan érhető el, hogy a lengő súly éppen ilyen alakú pályán mozogjon.

A kényszerpálya alakja

A keresett kényszerpályát meghatározó összefüggés tehát (*1. ábra*)



1. ábra

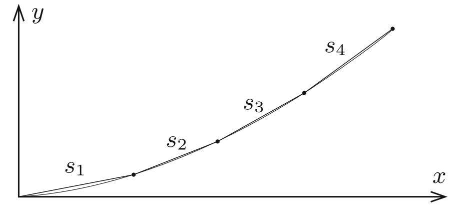
$$mg\sin\alpha(s) = Ds. \tag{1}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása felsőbb matematikai ismereteket igényel, ezért itt azt az utat választjuk, hogy megadjuk a megoldást, és belátjuk, hogy valóban megfelel a fentieknek. A kényszerpálya egy *ciklois.* Ha egy kör egy egyenesen gördül, minden pontja ciklois pályán mozog. Az 1. ábrán látható koordináta-rendszerben az r sugarú kör az $y = 2r$ egyenletű egyenesen gördül, és azt a cikloist választjuk, amelyik átmegy az origón. Ennek a paraméteres egyenlete

$$x_1(\varphi) = r(\varphi + \sin\varphi),$$
$$y_1(\varphi) = r(1 - \cos\varphi).$$

(Ez egy periodikus görbe, de számunkra csak a $-\pi < \varphi < \pi$ szakasza érdekes.) Belátjuk, hogy erre a görbére az (1) egyenlet teljesül, ha a távolságot az ív mentén az origótól mérjük.

Elsőnek a cikloisív hosszát számoljuk ki. Tekintsük a görbe egy adott, φ-vel jellemzett pontját! A 0-tól φ-ig terjedő szögtartományt felosztjuk N részre úgy, hogy $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = \varphi$ és $\varphi_n - \varphi_{n-1} = \Delta_n$ legyen. A felosztás lehet egyenletes, de ez nem szükséges. Amint majd látni fogjuk, egyedül az a fontos, hogy minden Δ_n olyan kicsiny legyen, hogy a $\sin\Delta_n \approx \Delta_n$ közelítés alkalmazható legyen. Ezután vegyük a φ_n-ekhez tartozó (x_n, y_n) pontokat, és a görbeszakaszokat közelítsük a szomszédos pontok közötti húrokkal (*2. ábra*)!



Ennek a sokszorosan megtört vonalnak a hossza annál jobban megközelíti a cikloisív hosszát, minél finomabb a felosztás. Ennek megfelelően

$$s(\varphi) \approx \sum s_n,$$

ahol

$$s_n = \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} =$$
$$= r\sqrt{(\Delta_n + \sin\varphi_n - \sin\varphi_{n-1})^2 + (\cos\varphi_{n-1} - \cos\varphi_n)^2}.$$

A szögfüggvények különbségének azonos átalakítása után, majd alkalmazva a

$$2\sin\frac{\Delta_n}{2} \approx \Delta_n$$

közelítést az

$$s_n = r\Delta_n\sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\varphi_n + \varphi_{n-1}}{2}\right)}$$

kifejezést kapjuk, ami a félszögekre vonatkozó azonosság és a

$$\Delta_n \approx 4\sin\frac{\Delta_n}{4}$$

közelítés, majd ismét a szögfüggvények különbségére vonatkozó addíciós tétel segítségével az

$$s_n = 4r\left(\sin\frac{\varphi_n}{2} - \sin\frac{\varphi_{n-1}}{2}\right)$$

különbségre vezet. Ha ezeket összeadjuk, a közbülső tagok kiesnek, és az

$$s(\varphi) = 4r\left(\sin\frac{\varphi_N}{2} - \sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

vagyis az

$$s(\varphi) = 4r\sin\frac{\varphi}{2} \tag{2}$$

eredmény adódik.

Megjegyzés. A fenti összefüggés nem azt jelenti, hogy a húrokból álló vonal hossza a felosztástól függetlenül megegyezik az ív hosszával, hanem azt, hogy a két hosszúság az alkalmazott közelítésekből következő pontossággal azonos. Márpedig minél finomabb a felosztás, a közelítések annál pontosabbak, így a fenti eredmény egzaktnak tekintendő. Ezért használjuk a $\approx$ jel helyett a határozott egyenlőséget.

Következő lépésként a φ-vel jellemzett ponthoz tartozó $\alpha(\varphi)$ szöget kell kiszámolnunk. Ehhez tekintsük a φ_N és a φ_{N-1} pontokat összekötő húr vízszintessel bezárt α_N szögét! Nyilván, minél kisebb Δ_N, az α_N szög annál jobban megközelíti $\alpha(\varphi)$-t. Másrészt

$$\operatorname{tg}\alpha_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}},$$

ami behelyettesítés után a már ismert közelítéssel és átalakításokkal a

$$\operatorname{tg}\alpha_N = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_N + \varphi_{N-1}}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_N}{2} - \frac{\Delta_N}{4}\right)$$

alakra hozható, amiből egyértelmű, hogy a felosztás finomításával α_N egyre pontosabban megközelíti $\varphi_N/2$-t. Így tehát írhatjuk, hogy

$$\alpha(\varphi) = \frac{\varphi}{2}. \tag{3}$$

A (2) és (3) eredményeket az (1) egyenletbe behelyettesítve a „rugóállandóra” a

$$D = \frac{mg}{4r}$$

értéket kapjuk, tehát (ellentétben a matematikai inga esetével) a cikloispályán a kitérés és a visszatérítő erő aránya *a kitéréstől független állandó.* Innen a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$$

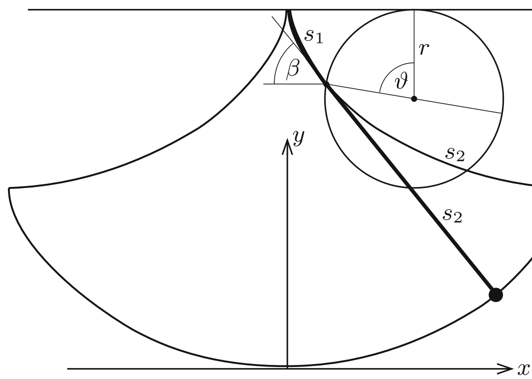
képlet alapján az következik, hogy a kérdéses cikloispályán az origó ($\varphi = 0$) körül súrlódás nélkül ide-oda mozgó test rezgésideje egy $\ell = 4r$ hosszúságú matematikai inga (kis kitérésekhez tartozó) lengésidejének felel meg, de a cikloisinga esetében a periódusidő a lengés amplitúdójától *független.*

Megjegyzés. A periódusidő amplitúdófüggetlensége persze nem minden határon túl értendő, hiszen a visszatérítő erőt a gravitáció adja, ennek a természetes felső határa pedig a teljes súly. A kapott (a D rugóállandónak megfelelő) arányossági tényező mellett a legnagyobb visszatérítő erő éppen az $s = 4r$ „kitéréshez” tartozik. Ebben a pontban a ciklois érintője függőlegessé válik, de mivel a ciklois fölfelé nem folytatódik, nagyobb kitérésről nincs értelme beszélnünk.

A cikloispálya létrehozása

Ha azt akarjuk, hogy egy matematikai inga nehezéke ne körpályán, hanem valami más pályán mozogjon, a lengést megfelelően kialakított akadályok közé kell szorítani (*3. ábra*). Belátható, hogy ha az elérendő pálya ciklois, akkor – furcsa módon – az alkalmazandó akadályprofilok ugyancsak r paraméterű cikloisívek, amelyek az elvárt pályához képest fölfelé $2r$ távolsággal, oldalra pedig fél periódussal el vannak tolva. Esetünkben ezek egyenlete

$$x_2(\vartheta) = r(\vartheta - \sin\vartheta),$$
$$y_2(\vartheta) = r(3 + \cos\vartheta), \quad (-\pi < \vartheta < \pi).$$



3. ábra

Azt, hogy ezek a profilok a $(0, 4r)$ pontban felfüggesztett, $4r$ hosszúságú inga esetében valóban az (x_1, y_1) pályát szolgáltatják, a következőképpen láthatjuk be. Feküdjön fel az inga fonala a ϑ-val jellemzett pontig! Ez a cikloisívet egy s_1 és egy s_2 hosszúságú darabra osztja. Mivel ezek összege $4r$, az inga szabadon lévő, a cikloistól az érintő irányában elálló, a vízszintessel β szöget bezáró részének hossza is s_2. A (2) és (3) egyenletek segítségével:

$$\sin\beta = \frac{s_2}{4r} = \sin\left(\frac{\pi - \vartheta}{2}\right).$$

A lengő súly koordinátái az előző egyenlet és addíciós tételek felhasználásával:

$$x(\vartheta) = x_2(\vartheta) + s_2\cos\beta = r(\vartheta + \sin\vartheta),$$
$$y(\vartheta) = y_2(\vartheta) - s_2\sin\beta = r(1 - \cos\vartheta),$$

ami valóban a szükséges pálya.

Vajon miért nem találkozunk ilyen ingaórákkal, miért nem ilyennek építették a nagy pontosságú órákat? A válasz egyszerű: az ingaóra pontossága azt jelenti, hogy az ismétlődő lengések ideje a kívánalmaknak megfelelően azonos, márpedig ez biztosított, ha a lengések amplitúdója mindig ugyanakkora. Ezt megoldja az energiaveszteség megfelelő pótlása, nem szükséges tehát, hogy bármilyen amplitúdó mellett ugyanaz legyen a lengésidő.

A Huygens-féle cikloisinga gyakorlati szempontból nem hozott áttörést az igen pontos ingaórákért folyó versenyfutásban, de elméleti érdekessége és matematikai szépsége több, mint három évszázad múltán is kiérdemli csodálatunkat.