I. rész

1. *Lara 3 piros, 4 kék és 3 sárga építőkockával játszik, melyek legfeljebb csak a színükben különböznek egymástól. Az összes építőkockát egymásra téve szeretne egy tornyot építeni.*

Hányféle színmintázatú tornyot építhet, ha

a) piros kockát sem alulra, sem felülre nem tesz;

b) legalább két piros elem közvetlenül egymás fölött van? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Összesen 10 kocka van, tehát 10 emeletes lesz a torony, ebből a 3 piros kockát csak 8 helyre teheti, ami $\binom{8}{3}=56$ lehetőség. A 4 kék kockát a maradék 7 hely bármelyikére helyezheti, amit $\binom{7}{4}=35$-féleképpen tehet meg, a sárga kockák helye pedig már egyértelmű. Mivel a piros, illetve kék kockák elhelyezése egymástól függetlenül történik, a színmintázatok száma $56\cdot 35=1960$.

b) A két egymás fölötti elemet ragasszuk képzeletben össze, és tekintsük őket egy elemnek (az elemek sorrendjének megszámolása így könnyebb; a színmintázatnál majd figyelembe kell venni, hogy ez 2 kockányi piros szín). A 9 kocka lehetséges sorrendjeinek száma így $2\cdot\frac{9!}{2!4!3!}=2520$, ahol a 2-es szorzó azért van, mert nem mindegy, hogy az 1 szintes és a 2 szintes piros elem hol helyezkedik el. Azonban azt az esetet, ahol mind a három piros kocka egymás fölött van, így kétszer számoltuk. Ragasszuk össze a három piros kockát, így megkapjuk, hogy ezen esetek száma $\frac{8!}{1!4!3!}=280$.

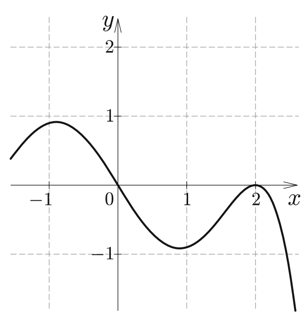
Tehát $2520-280=2240$ megfelelő színmintázat van ebben az esetben.

2. *Az* ábra *egy f függvény deriváltfüggvényének ($f'(x)$) egy részletét mutatja. Adjuk meg az alábbi állítások esetén, hogy melyik igaz, melyik hamis, illetve melyiknél nem lehet ezt eldönteni. Válaszunkat indokoljuk.*

a) A 0 pontban az f függvénynek lokális maximuma van.

b) Ha $0\le x\le 2$, akkor $f(x)\le 0$.

c) Az f függvény képe az origóra szimmetrikus a $(-1,1)$ intervallumon.



d) Az f függvénynek az $x=2$ helyen inflexiós pontja van. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Igaz. Az f' értéke a 0 helyen 0, és pozitívból negatívba vált.

b) Nem lehet eldönteni. Az f' függvény menetéből nem lehet pontosan rekonstruálni az f függvényt. (Egy konstans hozzáadásával f értéke az adott intervallumon pozitívvá vagy negatívvá tehető, míg a deriváltfüggvény nem változik.)

c) Hamis. Mivel f' az origóra középpontosan szimmetrikus (ráadásul egy, az adott intervallumnál valamivel szűkebb intervallumon), így az f függvény az y tengelyre szimmetrikus (ezen a szűkebb intervallumon).

d) Igaz. Mivel $f'(2)=0$ és nem vált előjelet a 2-ben, így inflexiós pontja van.

3. *Krisztiánnak* 80 *CD-ből álló gyűjteménye van. A CD-k között* 48 *olyan van, amin több előadó szerepel* (T), 24 *olyan van, amin egy előadó vagy együttes számai vannak* (E), *és* 8 *hangszeres zenei CD-je* (H) *is van. Sajnos Krisztián nem túl rendes, és az összes CD egy fiókban hever egymás hegyén-hátán.*

Egyik barátja megkéri, hogy vigyen el a partijára 5 *CD-t. Mivel – mint mindig – Krisztián nagy rohanásban van, anélkül, hogy a fiókba nézne, kivesz onnan* 5 *CD-t.*

a) Mi a valószínűsége annak, hogy csak hangszerest visz?

b) Mi a valószínűsége, hogy az öt CD között lesz legalább egy (T), *viszont nem lesz* (H)*?*

c) Krisztián rápillantott a kezében lévő CD-kre, és látta, hogy a legfelső (H). *Mi a valószínűsége, hogy a többi is az?* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) A jó esetek száma $\binom{8}{5}=56$, az összes eset száma $\binom{80}{5}=24\,040\,016$, így a valószínűség $p_a=\frac{56}{24\,040\,016}(\approx 2{,}33\cdot 10^{-6})$.

b) 1, 2, 3, 4 vagy 5 (T), és ennek megfelelően 4, 3, 2, 1 vagy 0 (E) lesz a választott lemezek között (és nyilván mindig 0 (H), amit $\binom{8}{0} = 0 = 1$-féleképp választhatunk ki, de ezt nem szükséges leírni):

$$p_b = \frac{\binom{48}{1}\binom{24}{4} + \binom{48}{2}\binom{24}{3} + \binom{48}{3}\binom{24}{2} + \binom{48}{4}\binom{24}{1} + \binom{48}{5}\binom{24}{0}}{\binom{80}{5}} \approx 0{,}58.$$

c) Használjuk a feltételes valószínűségre vonatkozó képletet (itt most számít a sorrend):

$$p_c = \frac{P(\text{első az és a többi is az})}{P(\text{első az})} = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{80\cdot 79\cdot 78\cdot 77\cdot 76}}{\frac{8\cdot 79\cdot 78\cdot 77\cdot 76}{80\cdot 79\cdot 78\cdot 77\cdot 76}} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{79\cdot 78\cdot 77\cdot 76}\ (\approx 2{,}33\cdot 10^{-5}).$$

4. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*
a) $2^{4x-1}\cdot 4^{2x+3} = 8^x$;
b) $\sqrt{x-\sqrt{x+2}} \le 2$. (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Alakítsuk át mindkét oldalt:

$$2^{4x-1}\cdot 2^{4x+6} = 2^{3x},$$
$$2^{8x+5} = 2^{3x}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt ebből $8x+5=3x$, és így $x=-1$ következik, ami az ekvivalens lépések miatt megoldása az egyenletnek.

b) A bal oldal nemnegatív, így az egyenlőtlenséget négyzetre emelhetjük: $x-\sqrt{x+2}\le 4$, de $0\le x-\sqrt{x+2}$-nek is teljesülnie kell. Ekkor $x\ge\sqrt{x+2}\ge 0$, amiből $x^2\ge x+2$, vagyis $x^2-x-2=(x+1)(x-2)\ge 0$. Ebből pedig $x\ge 2$ vagy $x\le -1$ következik, de ez utóbbi ellentmond az $x\ge 0$ feltételnek.

A belső gyökjel alatt is nemnegatív szám kell, hogy álljon, vagyis $x\ge -2$.

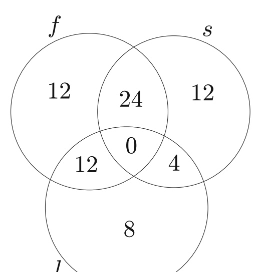
A kettőt összevetve $x\ge 2$ adódik. Ekkor megoldandó az $x-4\le\sqrt{x+2}$ egyenlőtlenség. Ha $2\le x<4$, akkor a bal oldal negatív, a jobb oldal pozitív, tehát ez megfelelő. Ha $x\ge 4$, akkor négyzetre emelve az $x^2-8x+16\le x+2$ egyenlőtlenséget kapjuk, amiből $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)\le 0$, azaz $2\le x\le 7$. Ekkor tehát $4\le x\le 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $2\le x\le 7$.

II. rész

5. *A Schiller Gimnázium diákjainak mindegyike első idegen nyelvként angolt tanul, és legalább egy, legfeljebb két nyelvet választhatnak a francia, spanyol és latin közül. A 10. évfolyam 72 diákjából 40-en két nyelvet is választottak. 48-an tanulnak franciául, 40-en spanyolul és valahányan latinul. 24-en tanulnak franciául és spanyolul is, és 12-en franciául és latinul.*
a) *Hányan tanulnak összesen latinul; és ebből hányan spanyolul is?*
Az évfolyamról egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy
b) *franciául és spanyolul,*
c) *franciául vagy spanyolul,*
d) *vagy franciául, vagy latinul (de nem mindkét nyelven) tanul?* (*16 pont*)

Megoldás. Kezdjük el kitölteni a Venn-diagramot. Jelöljük a nyelveket kezdőbetűjükkel. A 40 diák közül, akik 2 plusz nyelvet is választottak, 24-en franciául és spanyolul, 12-en francia és latin nyelven, tehát $40-24-12=4$ tanuló választotta a spanyolt és latint. A 40 spanyolul tanuló közül $24+4=28$ tanuló választott még egy nyelvet, így $40-28=12$ diák tanul csak spanyolul (az angol mellett, amire ezután nem térünk ki). A csak franciául tanuló diákok száma $48-24-12=12$. Végül, a csak latinul tanulók száma $72-(24+12+4+12+12)=8$.



$a)$ Tehát összesen $12+4+8=24$ diák tanul latint, és ebből 4 spanyolt is.

$b)$ $p_{fs}=\dfrac{24}{72}=\dfrac{1}{3}$.

$c)$ $p_{f\vee s}=\dfrac{48+16}{72}=\dfrac{64}{72}=\dfrac{8}{9}$.

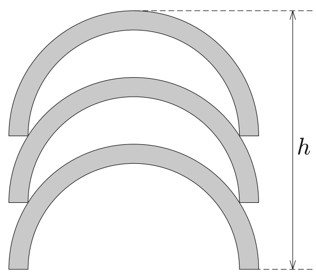
$d)$ $p_{f\bar{l}\vee\bar{f}l}=\dfrac{(12+24)+(8+4)}{72}=\dfrac{48}{72}=\dfrac{2}{3}$.

6. *Egy parkban néhány, betonból készült, félgömb formájú virágtartót használnak. A félgömbök belső sugara* 44 cm, *falvastagsága* 8 cm, *a beton sűrűsége* 2,2 g/cm^3.

a) Hány m^3 *virágföld fér egy ilyen tartóba?*

b) Milyen nehéz egy tartó?

c) A tél beállta előtt mindegyik tartót kiürítik, majd hármat-hármat egymásra helyeznek. Milyen magas egy ilyen rakás?

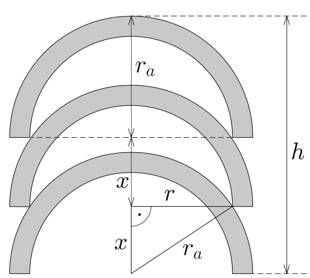


d) Tavasszal újra kihelyezik a tartókat. Előtte fehérre meszelik a tartók külső részét (a peremet is). Egy-egy virágtartónak mekkora területű része lesz így frissen meszelve (cm^2-ben)? *(16 pont)*

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A virágtartók belső sugara $r=44$ cm, külső sugara $r_a=52$ cm, két egymásra rakott tartó aljának távolsága pedig x.

$a)$ A tartóba tehető virágföld térfogata:

$$V_{\text{virágföld}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\approx 0{,}178\ \text{m}^3.$$



$b)$ A tartó térfogata:

$$V_{\text{tartó}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(r_a^3-r^3)\approx 116\,080\ \text{cm}^3.$$

A tartó tömege: $m=\varrho\cdot V\approx 255$ kg.

$c)$ A Pitagorasz-tételt felírva: $r_a^2=x^2+r^2$, amiből $x\approx 27{,}7$ cm, és így a kérdezett magasság: $h=2x+r_a\approx 107{,}4$ cm.

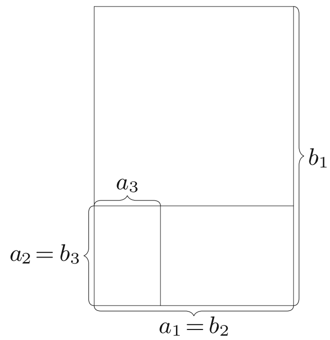
$d)$ A lefestendő felület áll egy r_a sugarú félgömbből, valamint egy r_a és r sugarú kör által meghatározott körgyűrűből:

$$F=\frac{1}{2}\cdot 4\pi r_a^2+\pi(r_a^2-r^2)=\pi(3r_a^2-r^2)\approx 19\,402{,}48\ \text{cm}^2.$$

7. *Egy téglalap oldalai* $a_1=2$ m *és* $b_1=3$ m. *Felosztjuk két téglalapra az* ábrán *látható módon úgy, hogy az egyik hasonló az elsőhöz, oldalai* a_2 *és* $b_2=a_1$. *Ezt a második téglalapot is felosztjuk úgy, hogy a kapott két téglalap közül az egyik hasonló hozzá, és ennek a harmadik téglalapnak az oldalai* a_3 *és* $b_3=a_2$. *Ezt az eljárást folytatjuk.*

a) Milyen hosszúak az n*-edik téglalap oldalai?*

b) Milyen n *esetén lesz az* n*-edik és az* $(n+1)$*-edik téglalap területének különbsége* 1 cm^2*-nél kisebb?*



c) Mekkora az első n téglalap kerületének összege? *(16 pont)*

Megoldás. *a)* $b_1 = 3$ m, $a_1 = 2$ m $= \frac{2}{3} b_1$;
$b_2 = a_1 = \frac{2}{3} b_1$; $a_2 = \frac{2}{3} b_2 = (\frac{2}{3})^2 \cdot b_1$;
$b_n = a_{n-1} = \frac{2}{3} b_{n-1} = (\frac{2}{3})^{n-1} \cdot b_1$; $a_n = \frac{2}{3} b_n = (\frac{2}{3})^n \cdot b_1$.

b) Írjuk fel az n. és az $(n+1)$. téglalap területét:

$$T_n = a_n \cdot b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot b_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot b_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot b_1^2,$$

$$T_{n+1} = a_{n+1} \cdot b_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot b_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot b_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \cdot b_1^2.$$

A kettő különbsége:

$$T_n - T_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \cdot b_1^2.$$

Mivel $b_1 = 300$ cm, azért ez pontosan akkor kisebb 1 cm^2-nél, ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) < \frac{1}{90\,000}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve ebből:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} < \frac{1}{50\,000},$$
$$(2n-1) \cdot \lg \frac{2}{3} < \lg \frac{1}{50\,000},$$
$$2n - 1 > \frac{\lg \frac{1}{50\,000}}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{-\lg 50\,000}{\lg 2 - \lg 3},$$
$$n > \frac{1}{2} - \frac{\lg 50\,000}{2(\lg 2 - \lg 3)} \approx 13{,}8.$$

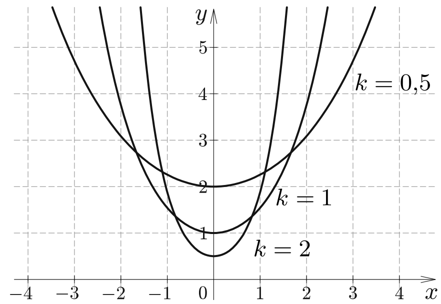
Tehát $n \geq 14$ esetén lesz az n-edik és az $(n+1)$-edik téglalap területének különbsége 1 cm^2-nél kisebb.

c) Az első n téglalap kerületének összege:

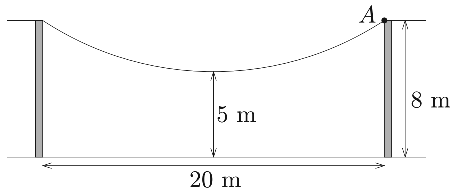
$$2 \cdot \left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3 \right) + \right.$$
$$\left. + \left(3 + \frac{2}{3} \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 3 \right) \right) =$$
$$= 2 \cdot \left(3 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \right) =$$
$$= 12 \cdot \left(\frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) + 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6 = 30 - 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

8. *Egy kalandpark pályáján két fa között egy függőhíd található. A felfüggeszett híd alakjának általános képlete* $f(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$*, ahol a és k valós paraméterek. Az* 1. ábrán *az $a = 1$ és $k = 0{,}5$, $k = 1$, illetve $k = 2$ értékekhez tartozó láncgörbék láthatók.*[1]

[1] A 8. feladat szövegéből eredetileg kimaradt, hogy a görbék az $a = 1$ értékhez tartoznak.



1. ábra



2. ábra

a) *A* 2. *ábrán a híd vázlatos oldalnézetét látjuk. Határozzuk meg a híd görbéjéhez tartozó két paraméter értékét* 3 *tizedesjegyre kerekítve (a talajszintet tekintsük az* x*-tengelynek.)*

b) *Határozzuk meg, hogy az* A *pontban a híd milyen szöget zár be a vízszintessel.*

c) *Reklámfelületet szeretnének felszerelni a híd egyik oldalára úgy, hogy a felület a talajszint, a híd és a két fa zárja közre. Mekkora felület keletkezik így?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) $f(0)=5$, vagyis $5=a\cdot\dfrac{e^0+e^0}{2k}$, amiből $5k=a$. Tudjuk még, hogy

$$8=f(10)=a\cdot\frac{e^{10k}+e^{-10k}}{2k}=5k\cdot\frac{e^{10k}+e^{-10k}}{2k},$$

amiből $3{,}2=e^{10k}+e^{-10k}$. Legyen $u=e^{10k}$, ekkor u-val beszorozva kapjuk, hogy $u^2-3{,}2u+1=0$, amiből $u_{1,2}=\dfrac{3{,}2\pm\sqrt{10{,}24-4}}{2}\approx\dfrac{3{,}2\pm2{,}5}{2}$, azaz $u_1=2{,}85$ és $u_2=0{,}35$ (a két szám egymás reciproka). Ebből $k_1=0{,}105$, $k_2=-0{,}105$ és a megfelelő a értékek $a_1=0{,}525$ és $a_2=-0{,}525$. (A láncgörbéknél a pozitív értékeket szokás használni.)

b) $f(x)=2{,}5\big(e^{0{,}105x}+e^{-0{,}105x}\big)$, amiből $f'(x)=2{,}5\cdot0{,}105\big(e^{0{,}105x}-e^{-0{,}105x}\big)$, és így $f'(10)\approx0{,}658$. A keresett szöget α-val jelölve $\operatorname{tg}\alpha=f'(10)=0{,}658$, amiből $\alpha\approx33{,}3^\circ$.

Tehát az A pontban a híd körülbelül 33°-os szöget zár be a vízszintessel.

c)

$$\begin{aligned}T&=2\cdot\int_0^{10}2{,}5\big(e^{0{,}105x}+e^{-0{,}105x}\big)\,\mathrm{d}x=\\&=2\cdot\left[2{,}5\left(\frac{1}{0{,}105}e^{0{,}105x}-\frac{1}{0{,}105}e^{-0{,}105x}\right)\right]_0^{10}=\\&=5\left(\frac{1}{0{,}105}e^{1{,}05}-\frac{1}{0{,}105}e^{-1{,}05}\right)-5\left(\frac{1}{0{,}105}e^{0}-\frac{1}{0{,}105}e^{0}\right)\approx119{,}41\ \mathrm{m}^2.\end{aligned}$$

9. *a*) *Hány osztója van a* $2018\cdot2019$*, illetve a* 2018^{2019} *számnak?*

b) *Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?*

c) *Bizonyítsuk be, hogy* 2018^{2019} *legalább* $3\cdot2019$ *számjegyből áll.*

d) *Melyik nagyobb:* 2018^{2019} *vagy* 2019^{2018}?

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) $2018=2\cdot1009$, $2019=3\cdot673$, így az osztók száma:

$$d(2018\cdot2019)=d(2\cdot3\cdot673\cdot1009)=2^4=16,$$
$$d(2018^{2019})=d(2^{2019}\cdot1009^{2019})=2020^2=4\,080\,400.$$

b) $2018\cdot2019$ osztói:

$$1,\ 2,\ 1009,\ 2018;\ 3\cdot1=3;\ 3\cdot2=6;\ 3\cdot1009=3027;\ 3\cdot2018=6054;$$
$$673\cdot1=673;\ 673\cdot2=1346;\ 673\cdot1009=679\,057;\ 673\cdot2018=1\,358\,114;$$
$$2019\cdot1=2019;\ 2019\cdot2=4038;\ 2019\cdot1009=2\,037\,171;\ 2019\cdot2018=4\,074\,342.$$

Összegük 8 168 880. (Ezt az összeget így is kiszámolhatjuk:

$$\frac{2^2-1}{2-1}\cdot\frac{1009^2-1}{1009-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{673^2-1}{673-1}=3\cdot 1010\cdot 4\cdot 674=8\,168\,880.)$$

2018^{2019} osztóit az első módszerrel nehéz lenne összeszámolni. Vegyük észre, hogy minden osztó $2^k\cdot 1009^l$ alakú, ahol k és l 0 és 2019 közötti tetszőleges egész szám lehet. Tehát az osztók összegét felírhatjuk

$$\sum_{k=0}^{2019}2^k\cdot\sum_{l=0}^{2019}1009^l$$

alakban, hiszen minden osztó két szám szorzata az alábbi táblázatban:

	1	2	4	8	...	2^{2019}
1						
1009						
1009^2						
.						
.						
.						
1009^{2019}						

Az összes lehetséges szorzat összege így

$$\frac{1009^{2020}-1}{1009-1}\cdot\frac{2^{2020}-1}{2-1}=\frac{1009^{2020}-1}{1008}\cdot\left(2^{2020}-1\right).$$

c)

c)
$$\begin{aligned}2018^{2019}&>(2\cdot 10^3)^{2019}=2^{2019}\cdot 10^{3\cdot 2019}=\left(2^{10}\right)^{201}\cdot 2^9\cdot 10^{6057}>\\&>\left(10^3\right)^{201}\cdot 2^9\cdot 10^{6057}=10^{603}\cdot 2^9\cdot 10^{6057}=512\cdot 10^{6660}>\\&>5\cdot 10^2\cdot 10^{6660}=5\cdot 10^{6662},\end{aligned}$$

ami legalább $6663>6057=3\cdot 2019$ számjegy.

d)

d)
$$\begin{aligned}2018^{2019}\quad&?\quad 2019^{2018},\\2018\quad&?\quad\left(\frac{2019}{2018}\right)^{2018}=2{,}7176\ldots.\end{aligned}$$

Tehát 2018^{2019} a nagyobb.