Bemutatjuk Euler arányösszeg-tételének történetét, adunk rá egy új bizonyítást, és egy érdekes egyenlőtlenséggé alakítjuk Euler arányösszeg-formuláját.

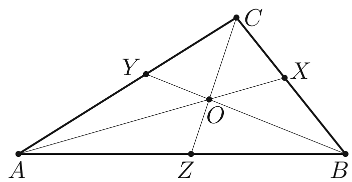
1. Bevezetés

Leonhard Euler (1707–1783), korának legnagyobb matematikusa, a geometriát is számos azóta híressé vált tétellel gazdagította. Ebben a dolgozatban[1] a Magyarországon kevésbé ismert arányösszeg-tételével foglalkozunk, amelynek nemzetközi irodalma sem túlságosan bőséges, habár időről időre feltűnnek újabb bizonyításokat, illetve lehetséges általánosításokat tárgyaló cikkek (lásd [4, 5, 6, 9, 10]).

1. tétel (Euler arányösszeg-tétele [2]). *Az euklideszi sík minden ABC háromszögének bármely O belső pontjára*

$$\frac{AO}{OX}+\frac{BO}{OY}+\frac{CO}{OZ}+2=\frac{AO}{OX}\cdot\frac{BO}{OY}\cdot\frac{CO}{OZ}, \tag{1}$$

ahol $X = AO \cap BC$, $Y = BO \cap CA$, $Z = CO \cap AB$.



Habár Euler már 1780. május 1-jén benyújtotta a kiadónak az arányösszeg-tételt tartalmazó tanulmányát [2], az csak 1783-ban bekövetkezett halála után 22 évvel jelent meg. Sok munkája jutott erre a sorsa, aminek legfőbb oka az volt, hogy valósággal ontotta magából a cikkeket (élete során több, mint 800-at írt a 28 nagyobb mű mellett), így az általa preferált Berlini, illetve Szentpétervári Akadémiák folyóiratainál kiadatlan művei igencsak feltorlódtak.

A kortársak azonban ismerték Euler arányösszeg-tételét, amit jól mutat, hogy Anders Johan Lexell (1740–1783), aki az Euler-család jó barátja volt, és haláláig ugyanannak a Szentpétervári Akadémiának volt a tagja, már 1784-ben publikálta a tétel gömbháromszögekre érvényes változatát [3].

Jelen szerzőknek is egy általánosabb problémával, a projektív-metrikus terek karakterizációjával [8] összefüggésben került látóterébe az arányösszeg-tétel [7].

Még az arányösszeg-tételnél is kevésbé ismert, pedig már Euler [2] dolgozatában is szerepelt, hogy az ABC háromszög megszerkeszthető az (1) formulában szereplő hosszak ismeretében.

2. tétel (Szerkeszthetőség). *Ha adottak egy ismeretlen ABC háromszög valamely O pontjára illeszkedő AX, BY és CZ szakaszok hosszai, valamint azok O pont általi felosztásának arányai, akkor az ABC háromszög megszerkeszthető.*

Ebben a dolgozatban nemcsak a fenti tételeket igazoljuk, hanem a 3. tételben pontosan megadjuk annak feltételeit is, hogy három olyan szakaszt, amelyek belsejében adott egy-egy pont, mikor lehet ezen belső pontjaikban úgy összeilleszteni, hogy a valamely három kiválasztott végpontjuk által meghatározott háromszögnek a kiválasztott végponttal szemben lévő oldalai tartalmazzák a szakaszok nem kiválasztott végpontjait[2].

Végül, bár bemutatjuk a közvetlen általánosítás lehetőségét is, inkább egy az (1) egyenlőségből született egyenlőtlenséget bizonyítunk, mely éppenséggel pontosan akkor válik egyenlőséggé, ha az AX, BY és CZ szakaszok egy ponton mennek át. A 4. tétel határozottan emlékeztet Routh tételére ([1, 13.55], [11]).

2. Az arányösszeg-tétel és megfordításának bizonyítása

Az 1. tétel bizonyítása. Áttekinthetőbbé válik Euler (1) formulája, ha bevezetjük az $a=\dfrac{AO}{OX}$, $b=\dfrac{BO}{OY}$ és $c=\dfrac{CO}{OZ}$ jelöléseket:

$$a+b+c+2=abc. \tag{2}$$

[1] Ez a kutatás az NKFIH K-116451 és KH_18 129630 projektjei támogatásával készült.

[1] Ugyanez angol nyelven is elérhető, lásd [7].

[2] A [9] tanulmány igazolta, hogy amennyiben csak az (1) egyenletben szereplő arányok betartása fontos, akkor (1) elegendő: minden további feltétel nélkül van olyan háromszög, amelyben éppen az (1) egyenletben szereplő arányok lépnek fel. Sőt, a szerző megjegyzi, hogy egy ilyen háromszög minden affin képe is megteszi.

Mindkét oldalhoz hozzáadva az $1+a+b+c+ab+bc+ca$ kifejezést, a jobb oldal újra szorzatalakba írható, és a bal oldal is szorzatok összegévé válik:

$$(1+b)(1+c)+(1+a)(1+c)+(1+a)(1+b)=(1+a)(1+b)(1+c).$$

Az a, b és c értéke nyilván nem -1, ezért a jobb oldallal osztva az ekvivalens

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1 \tag{3}$$

egyenlőséghez jutunk, vagyis (1) ekvivalens az

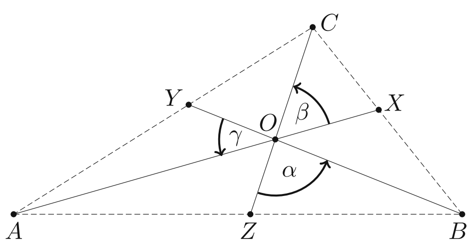
$$\frac{OX}{AX}+\frac{OY}{BY}+\frac{OZ}{CZ}=1 \tag{4}$$

egyenlőséggel. Ez azonban közvetlenül adódik az

$$\frac{OX}{AX}=\frac{t(OBC)}{t(ABC)},\quad \frac{OY}{BY}=\frac{t(OCA)}{t(ABC)},\quad \frac{OZ}{CZ}=\frac{t(OAB)}{t(ABC)}$$

egyenlőségekből. □

A 2. tétel bizonyítása. Annak érdekében, hogy elkerüljük az áttekinthetetlenül összetett formulákat, most is alkalmazzuk az $a=\dfrac{AO}{OX}$, $b=\dfrac{BO}{OY}$ és $c=\dfrac{CO}{OZ}$ jelöléseket, melyekre a feltétel szerint (2), vagy ami ugyanaz, (3) teljesül. Bevezetjük még az $\alpha=ZOB\sphericalangle$, $\beta=XOC\sphericalangle$ és $\gamma=YOA\sphericalangle$ szögeket, amelyekre nyilván $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ érvényes.



Feladatunk tehát az α, β és $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ értékek megtalálása.

Az X pont akkor és csak akkor esik a BC szakaszra, ha

$$BO\cdot OC\sin\alpha=t(BOC)=BO\cdot OX\sin\gamma+CO\cdot OX\sin\beta,$$

vagyis

$$\frac{AO}{OX}\cdot\frac{\sin\alpha}{OA}=\frac{\sin\alpha}{OX}=\frac{\sin\gamma}{OC}+\frac{\sin\beta}{BO}.$$

A csúcsok ciklikus permutációjával ugyanígy látjuk, hogy $Y\in CA$ és $Z\in AB$ akkor és csak akkor igaz, ha rendre

$$\frac{BO}{OY}\cdot\frac{\sin\beta}{OB}=\frac{\sin\alpha}{OA}+\frac{\sin\gamma}{CO},$$
$$\frac{CO}{OZ}\cdot\frac{\sin\gamma}{OC}=\frac{\sin\beta}{OB}+\frac{\sin\alpha}{AO}.$$

Az $x=\dfrac{\sin\alpha}{AO}$, $y=\dfrac{\sin\beta}{OB}$ és $z=\dfrac{\sin\gamma}{OC}$ bevezetésével azt kapjuk, hogy ezek teljesítik az

$$\begin{aligned} ax-y-z&=0,\\ -x+by-z&=0,\\ -x-y+cz&=0 \end{aligned} \tag{5}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Az (5) egyenleteinek különbségéből rögtön adódik, hogy a megoldásokra $(1+a)x=(1+b)y=(1+z)c$ teljesül, vagyis minden megoldás $\left(\dfrac{\lambda}{1+a},\dfrac{\lambda}{1+b},\dfrac{\lambda}{1+c}\right)$ alakú, ahol $\lambda\in\mathbb{R}$. Eszerint

$$\lambda\frac{AO}{1+a}=\sin\alpha,\quad \lambda\frac{BO}{1+b}=\sin\beta\quad \text{és}\quad \lambda\frac{CO}{1+c}=\sin\gamma. \tag{6}$$

Ebből

$$\frac{OB}{1+b}\sin\alpha=\frac{OA}{1+a}\sin\beta,$$

és

$$\frac{OC}{1+c} = \frac{\sin\gamma}{\lambda} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha}{\lambda}\cos\beta + \cos\alpha\frac{\sin\beta}{\lambda} =$$
$$= \frac{OA}{1+a}\cos\beta + \frac{OB}{1+b}\cos\alpha$$

is következik. Utóbbi egyenlőség mindkét oldalából kivonva az $\frac{OB}{1+b}\cos\alpha$ kifejezést, majd az eredményt négyzetre emelve és hozzáadva az első egyenlethez, azt kapjuk, hogy

$$\frac{OB^2}{(1+b)^2}\sin^2\alpha + \left(\frac{OC}{1+c} - \frac{OB}{1+b}\cos\alpha\right)^2 = \frac{OA^2}{(1+a)^2}.$$

Ebből a bal oldalon a különbség négyzetre emelését elvégezve

(7)
$$\frac{OB^2}{(1+b)^2} - 2\cdot\frac{OC}{1+c}\cdot\frac{OB}{1+b}\cos\alpha + \frac{OC^2}{(1+c)^2} = \frac{OA^2}{(1+a)^2}$$

adódik. Ez a koszinusz-tétel értelmében azt jelenti, hogy van egy olyan PQR háromszög, amelynek a csúcsokkal szembeni oldalhosszaira rendre $p = \frac{OA}{1+a}$, $q = \frac{OB}{1+b}$ és $r = \frac{OC}{1+c}$ érvényes, és szögei a csúcsoknál rendre α, β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Az eredeti háromszöget tehát úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy a $p = \frac{AO\cdot OX}{AX}$, $q = \frac{BO\cdot OY}{BY}$ és $r = \frac{CO\cdot OZ}{CZ}$ hosszakat kiszámítjuk, ezekből megszerkesztjük a PQR háromszöget, ennek szögei megadják az α, β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ szögeket, amelyek alapján az AX, BY és CZ szakaszok egymáshoz képest beállíthatók. □

Az 1. tétel és a 2. tétel bizonyítása alapján világos, hogy az alábbi tétel feltételeit nem lehet könnyíteni.

3. tétel (Az arányösszeg-tétel megfordítása). *Ha adott közös O pontra illeszkedő AX, BY és CZ szakaszokra érvényes Euler (1) formulája, valamint a $p = \frac{AO\cdot OX}{AX}$, $q = \frac{BO\cdot OY}{BY}$ és $r = \frac{CO\cdot OZ}{CZ}$ számok mindegyike kisebb a másik kettő összegénél, akkor az AX, BY és CZ szakaszokat el lehet forgatni O körül úgy, hogy az X, Y, Z pontok rendre az ABC háromszög megfelelő oldalaira essenek.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $a = \frac{AO}{OX}$, $b = \frac{BO}{OY}$ és $c = \frac{CO}{OZ}$. A feltétel szerint

(8)
$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Szerkesszünk egy olyan PQR háromszöget, mely oldalainak hossza (a szokásos módon jelölve) p, q és r. A csúcsoknál lévő szögek legyenek rendre α, β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Forgassuk el az AX, BY és CZ szakaszokat úgy, hogy $ZOB\sphericalangle$ legyen α, $XOC\sphericalangle$ legyen β és $YOA\sphericalangle$ legyen γ. Eszerint

(9)
$$\begin{aligned} q^2 - 2rq\cos\alpha + r^2 &= p^2,\\ p^2 - 2rp\cos\beta + r^2 &= q^2,\\ p^2 - 2qp\cos\gamma + q^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Most igazoljuk, hogy a kialakult ABC háromszög csúcsokkal szemközti oldalai rendre tartalmazzák az X, Y és Z pontokat.

Legyen $\widehat{X} = AX \cap BC$, $\widehat{Y} = BY \cap CA$ és $\widehat{Z} = CZ \cap AB$, továbbá $\widehat{a} = \frac{AO}{O\widehat{X}}$, $\widehat{b} = \frac{BO}{O\widehat{Y}}$ és $\widehat{c} = \frac{CO}{O\widehat{Z}}$. Az ABC háromszögre is érvényes (1), így

(10)
$$\frac{1}{1+\widehat{a}} + \frac{1}{1+\widehat{b}} + \frac{1}{1+\widehat{c}} = 1$$

adódik. Bevezetve a $\widehat{p} = \frac{AO\cdot O\widehat{X}}{A\widehat{X}}$, $\widehat{q} = \frac{BO\cdot O\widehat{Y}}{B\widehat{Y}}$ és $\widehat{r} = \frac{CO\cdot O\widehat{Z}}{C\widehat{Z}}$ jelöléseket, (7) és a szerkesztés menete alapján

(11)
$$\begin{aligned} \widehat{q}^2 - 2\widehat{r}\widehat{q}\cos\alpha + \widehat{r}^2 &= \widehat{p}^2,\\ \widehat{p}^2 - 2\widehat{r}\widehat{p}\cos\beta + \widehat{r}^2 &= \widehat{q}^2,\\ \widehat{p}^2 - 2\widehat{q}\widehat{p}\cos\gamma + \widehat{q}^2 &= \widehat{r}^2. \end{aligned}$$

Az (9) egyenleteket összevetve az (11) egyenletekkel, mivel mindkét egyenlethármas azonos szögű, tehát hasonló háromszögekre vonatkozik, adódik, hogy $\widehat{p} = \lambda p$, $\widehat{q} = \lambda q$ és $\widehat{r} = \lambda r$ valamely $\lambda > 0$ számra. Tekintve a p, q, r és $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, $\widehat{r}$ definícióit, ebből $\dfrac{1}{1+\widehat{a}} = \dfrac{\lambda}{1+a}$, $\dfrac{1}{1+\widehat{b}} = \dfrac{\lambda}{1+b}$, és $\dfrac{1}{1+\widehat{c}} = \dfrac{\lambda}{1+c}$ adódik, amiből (8) és (10) összevetésével $\lambda = 1$ következik. Eszerint $\widehat{a} = a$, $\widehat{b} = b$, és $\widehat{c} = c$, vagyis $\widehat{X} = X$, $\widehat{Y} = Y$, és $\widehat{Z} = Z$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

3. Általánosítás helyett egy egyenlőtlenség

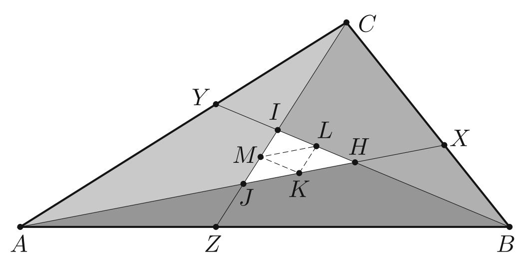
Belátható, hogy Euler arányösszeg-tétele igaz marad akkor is, ha a háromszög csúcsaiból kiinduló egyenesek metszéspontjáról csak annyit teszünk fel, hogy az nem esik a háromszög egyik oldalegyenesére se. Sőt, ezen általánosabb eset megfordítása is érvényben marad ha az X, Y, Z pontoktól csak azt várjuk el, hogy a megfelelő oldalegyenesekre essenek. Ennek bizonyítását itt nem végezzük el, helyette egy Routh tételére ([1, 13.55], [11]) emlékeztető egyenlőtlenséget mutatunk.

Az arányösszeg-formulát tekintsük most az ekvivalens (4) alakjában. Ez a formula a három szakasz egy ponton áthaladása esetén érvényes. Ha a szakaszok páronként különböző H, I, J pontokban metszik egymást, akkor is képezhetünk minden szakaszon arányt, ha a két metszéspont által meghatározott szakasz felezőpontját tekintjük új osztópontnak.

4. tétel. *Legyenek X, Y, Z az ABC háromszög rendre A, B, C csúccsal szemközti oldalainak pontjai, legyenek továbbá őket a szemközti csúcsokkal összekötő szakaszok metszéspontjai $H = AX \cap BY$, $I = BY \cap CZ$ és, $J = CZ \cap AX$. Végül legyenek ez utóbbiak által meghatározott HIJ háromszög oldalfelező pontjai $K = (J+H)/2$, $L = (H+I)/2$ és $M = (I+J)/2$. Ekkor*

$$\frac{KX}{AX} + \frac{LY}{BY} + \frac{MZ}{CZ} \geq 1, \tag{12}$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $K = L = M$.



Bizonyítás. Rendre azonos alapú háromszögek területének arányait írhatjuk fel a következőképpen:

$$\frac{t(HBC)}{t(ABC)} = \frac{HX}{AX}, \qquad \frac{t(JBC)}{t(ABC)} = \frac{JX}{AX}, \qquad \frac{t(ICA)}{t(ABC)} = \frac{IY}{BX},$$
$$\frac{t(HCA)}{t(ABC)} = \frac{HY}{BX}, \qquad \frac{t(JAB)}{t(ABC)} = \frac{JZ}{CX}, \qquad \frac{t(IAB)}{t(ABC)} = \frac{IZ}{CX}.$$

Ezeket a 12 bal oldalának kétszeresébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{HX+JX}{AX} + \frac{IY+HY}{BY} + \frac{JZ+IZ}{CZ} = \\
&= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} = \\
&= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} = \\
&= 1 - \frac{t(HAB)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(IBC)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(JAC)}{t(ABC)} = 3 - \frac{t(ABC) - t(HIJ)}{t(ABC)} = \\
&= 2 + \frac{t(HIJ)}{t(ABC)}.
\end{aligned}$$

Ezzel a tételünket bebizonyítottuk. □

Hivatkozások

[1] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[2] L. Euler, Geometrica et sphaerica quaedam, *Memoires de lAcademie des Sciences de Saint-Petersbourg,* **5** (1815), 96–114; Opera Omnia Series 1, vol. XXVI, 344–358;
eredeti: http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E749.pdf;
angol fordítás: http://eulerarchive.maa.org/Estudies/E749t.pdf.

[3] A. J. Lexell, Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum, *Acta academiae scientarum imperialis Petropolitinae,* **5**:1 (1784), 112–126;
http://www.17centurymaths.com/contents/euler/lexellone.pdf.

[4] A. Papadopoulos and W. Su, On hyperbolic analogues of some classical theorems in spherical geometry, *arXiv* (2015), http://arxiv.org/abs/1409.4742.

[5] B. Grünbaum and M. S. Klamkin, Euler's Ratio-Sum Theorem and Generalizations, *Mathematics Magazine,* **79**:2 (Apr) (2006), 122–130;
http://www.jstor.org/stable/27642919.

[6] B. Grünbaum, Cyclic ratio sums and products, *Crux Mathematicorum,* **24**:1 (1998), 20–25; https://cms.math.ca/crux/v24/n1
25.pdf.

[7] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum theorem revisited, *Forum Geom.,* **19** (2019);
http://forumgeom.fau.edu/FG2019volume19/FG2019index.html.

[8] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum formula in projective-metric spaces, *Beiträge zur Algebra und Geometrie,* (2018);
https://doi.org/10.1007/s13366-018-0422-6.

[9] G. C. Shephard, Euler's Triangle Theorem, *Crux Mathematicorum,* **25**:3 (1999), 148–153; https://cms.math.ca/crux/v25/n3/
153.pdf.

[10] C. E. Sandifer, 19th century Triangle Geometry (May 2006), *How Euler did it,* Math. Ass. Amer., 2007, 19–27;
http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-05.pdf.

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Routh's_theorem; Accessed 2019. március 8.