

A Magister Universitas érettségi felkészítő az 2000-es évek eleje óta működik. Jelenleg három városban lehetséges felkészítő tanfolyamainkra jelentkezni: Budapesten, Szegeden és Debrecenben. Matematika, fizika, kémia, biológia, történelem, magyar és angol tantárgyból készítünk fel diákokat az érettségire emelt- és középszinten is. Diákjainknak saját tanáraink által kifejlesztett és gondosan szerkesztett tananyagainkkal könnyítjük meg az érettségire való felkészülést. Jelentkezni a <https://erettségi-felkeszito.hu/> oldalon tudtok. Még idén is érdemes becsatlakozni intenzív tanfolyamainkra. Aki jövőre vagy később érettségizik a fenti tárgyak akármelyikéből, szívesen látjuk érettségi felkészítőinken. Ne maradjatok le!

I. rész

1. Kilencjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen kilencjegyű szám képezhető? (11 pont)

Megoldás. A szám számjegyei között nem szerepelhet a 0. A lehetséges eseteket aszerint soroljuk fel, hogy mi a legnagyobb számjegy, ami a felírt kilencjegyű számban szerepelni fog.

1. eset: 9 darab 9-es jegy. Ebből 1 darab kilencjegyű szám van.

2. eset: 8 darab 8-as, 1 darab 1-es jegy. Ezekből 9 szám képezhető.

3. eset: 7 darab 7-es, 2 darab 2-es jegy. Ezekből a számjegyekből $\binom{9}{2} = 36$ szám képezhető.

4. eset: 6 darab 6-os, 3 darab 3-as jegy. Ezekből $\binom{9}{3} = 84$ szám képezhető.

5. eset: 6 darab 6-os, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{6! \cdot 2!} = 252$ szám van.

6. eset: 5 darab 5-ös, 4 darab 4-es jegy. Ezekből $\binom{9}{4} = 126$ szám képezhető.

7. eset: 5 darab 5-ös, 3 darab 3-as, 1 darab 1-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{5! \cdot 3!} = 504$ szám van.

8. eset: 4 darab 4-es, 3 darab 3-as, 2 darab 2-es jegy. Ezekből $\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260$ szám van.

Tehát összesen 2272 darab kilencjegyű szám képezhető, amely a feladat feltételeit kielégíti.

2. Tekintsük a következő állításokat:

A : Ha egy függvény periodikus, akkor van legkisebb periódusa (alapperiódusa).

B : Létezik olyan 10 csúccsal rendelkező gráf, melynek fokszámai egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják.

C : Ha a_n és b_n korlátos sorozatok, akkor $a_n b_n$ is korlátos.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (8 pont)

b) Fogalmazzuk meg a *C* állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (4 pont)

Megoldás. a) Az *A* állítás hamis, mert pl. az $f(x) = 5$ függvény periodikus, de nincs legkisebb periódusa.

A *B* állítás igaz, pl. a tízpontú gráf csúcsai rendelkezzenek rendre 1; 2; ...; 10 hurokéllal. Ekkor a csúcsok fokszámai rendre 2; 4; ...; 20, ami növekvő számtani sorozat.

A *C* állítás igaz, mert ha a_n és b_n korlátos sorozatok, akkor megadhatók olyan $k; K > 0$ számok, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| < k$ és $|b_n| < K$. Innen adódik, hogy $|a_n b_n| < k \cdot K$, tehát $a_n b_n$ korlátos.

Megjegyzések. Az *A* állításhoz jó ellenpélda még pl. az ún. Dirichlet függvény, $f: \mathbb{R} \rightarrow \{0; 1\}$, $f(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{Q}$ és $f(x) = 1$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ez a függvény bármely $p \in \mathbb{Q}^+$ szerint periodikus, de nincs alapperiódusa, mert nincs legkisebb pozitív racionális szám.

Ha a *B* állításnál megköveteljük, hogy a gráf legyen egyszerű, akkor már nem tudunk a feltételeknek megfelelő gráfot megadni. Ennek oka az, hogy egy adott csúcs fokszáma a 0; 1; 2; ...; 9 értékek közül kerül ki, de a 0 és 9 együtt nem szerepelhet a fokszámok között, tehát a skatulya-elv miatt lesz két azonos fokszáma a gráfnak. Ha lesz két azonos fokszám, akkor a fokszámok nem alkothatnak növekvő számtani sorozatot.

b) A *C* állítás megfordítása: Ha az $a_n b_n$ sorozat korlátos, akkor az a_n és b_n is korlátos sorozatok. Ez hamis állítás, ugyanis legyen $a_n = n$ és $b_n = \frac{1}{n}$. Ekkor $a_n b_n = 1$, ami nyilván korlátos, de a_n nem korlátos.

3. Tekintsük az *ABC* háromszöget, ahol $A(0; 1)$, $B(3; 4)$ és $C(4; -3)$.

a) Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát. (4 pont)

b) Írjuk fel a háromszög köré írt kör egyenletét. (3 pont)

c) Határozzuk meg a háromszögbe írható kör sugarának pontos értékét. (3 pont)

d) Számítsuk ki annak a pontnak a koordinátáit, amelyben a *B*-ből induló belső szögfelező metszi a szemközti oldalt. (4 pont)

Megoldás. a) Először kiszámoljuk a háromszög oldalainak hosszát: $AB = 3\sqrt{2}$; $AC = 4\sqrt{2}$; $BC = 5\sqrt{2}$. Mivel $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ezért Püthagorasz tételének megfordítása miatt $\alpha = 90^\circ$.

A hegyesszögeket szögfüggvénnyel számoljuk ki, $\operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$, innen $\beta \approx 53,13^\circ$ és $\gamma = 90^\circ - \beta \approx 36,87^\circ$.

b) Mivel a háromszög derékszögű, ezért köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontjával egyezik meg és a sugara az átfogó fele. Az átfogó felezőpontja $F\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Az átfogó hossza $5\sqrt{2}$, így a köré írt kör sugara $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Tehát a köré írt kör egyenlete $(x - \frac{7}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{50}{4}$ vagy más alakban $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$.

Megjegyzés. A köré írt kör középpontját meghatározhattuk volna az oldalfelező merőlegesek metszeteiként is, viszont ez jelenleg nem praktikus, mert a háromszög derékszögű.

c) Használjuk az $r = \frac{T}{s}$ képletet. A terület $T = \frac{3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 12$, a kerület fele pedig $6\sqrt{2}$. Innen $r = \sqrt{2}$ adódik.

Megjegyzés. Derékszögű háromszög lévén az ismert $r = \frac{AB + AC - BC}{2} = \sqrt{2}$ alapján is megkaphatjuk a beírt kör sugarát.

d) Jelöljük L -l az a pontot, ahol a B -ből induló belső szögfelező metszi az AC oldalt. A szögfelezőtétel szerint $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, azaz az L pont az AC szakaszt $3 : 5$ arányban osztja ketté. Így L koordinátái: $L\left(\frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 0}{8}; \frac{3 \cdot (-3) + 5 \cdot 1}{8}\right) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

4. a) Adjuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:

$$\log_{x+2-6x^2} \left(\frac{3-5x}{2x+4} \right). \quad (10 \text{ pont})$$

b) Határozzuk meg az A ; B ; C kijelentések logikai értékét, ha tudjuk, hogy az alábbi állítás logikai értéke hamis.

$$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \vee C). \quad (4 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A $\log_a b$ kifejezés akkor van értelmezve, ha $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$. Tehát $x + 2 - 6x^2 > 0$, továbbá $x + 2 - 6x^2 \neq 1$ és $\frac{3-5x}{2x+4} > 0$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldása $x \in] -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}[$, mivel az egyenlőtlenségből képzett $x + 2 - 6x^2 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{2}{3}$ és a parabola lefelé nyíló. Mivel $x + 2 - 6x^2 \neq 1$, ezért $x \neq -\frac{1}{3}$ és $x \neq \frac{1}{2}$.

A törtes egyenlőtlenség megoldása $x \in] -2; \frac{3}{5}[$, ugyanis

$$\frac{3-5x}{2x+4} > 0 \Leftrightarrow ((3-5x > 0) \wedge (2x+4 > 0)) \vee ((3-5x < 0) \wedge (2x+4 < 0)).$$

Mindezeket egybevetve kapjuk, hogy a kifejezés értelmezési tartománya

$$\left] -\frac{1}{2}; \frac{3}{5} \right[\setminus \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}.$$

b) Az $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \vee C)$ kijelentés pontosan akkor hamis, ha előtagja igaz és utótagja hamis, tehát $A \leftrightarrow B = i$ és $B \vee C = h$. Mivel a $B \vee C$ kijelentés logikai értéke hamis, ezért B és C is hamisak. Tudjuk, hogy $A \leftrightarrow B = i$, így A és B logikai értékének meg kell egyeznie. Mivel B hamis volt, ezért A is hamis. Tehát a fenti kijelentés akkor hamis, ha A ; B ; C is hamisak.

Megjegyzés. A feladatot megoldhattuk volna igazságtáblázat felírásával is.

II. rész

5. a) Egy négypontú üres gráfba berajzolunk három élt úgy, hogy a gráf egyszerű legyen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott gráf összefüggő lesz? (5 pont)

b) Hány négy hosszú kört tartalmaz egy tízpontú teljes gráf? (4 pont)

Egy angol nyelvű csoportban, ahol öt fiú és öt lány tanul, minden óra elején szódolgozatot írat a tanárnő. A szódolgozatot mindig öt tanuló írja meg úgy, hogy tanáruk egymástól függetlenül, egyenlő valószínűséggel választja ki a tanulókat.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dolgozatot író tanulók között a fiúk és a lányok számának eltérése legfeljebb 2? (3 pont)

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő szódolgozatnál az ötödik lesz az első olyan, ahol teljesül, hogy a dolgozatot író diákok számának eltérése legfeljebb 2? (4 pont)

Eredményeinket tízezrekre kerekítve adjuk meg.

Megoldás. a) A kért esemény komplementerének valószínűségét határozzuk meg. Egy négy pontú teljes gráfnak $\binom{4}{2} = 6$ éle van. Ebből jelölünk ki hármat, ezt $\binom{6}{3} = 20$ különböző módon tehetjük meg. Ez az összes esetek száma. A komplementer esemény az, hogy ha kijelölünk három élt, akkor azok nem alkotnak összefüggő gráfot. Gondoljuk meg, hogy három él (melyek megfelelnek a feladat feltételeinek) mikor nem alkot összefüggő gráfot. Pontosan akkor, ha egy három hosszúságú kört határoznak meg. Ezt $\binom{4}{3} = 4$ különböző módon tehetik meg. Tehát a komplementer esemény valószínűsége $\frac{4}{20}$, azaz a kért esemény valószínűsége $\frac{16}{20} = 0,8$.

Megjegyzés. A kedvező esetek száma pontosan azt adja meg, hogy hány négy pontú számozott fa van. Ezek számát az ún. Cayley-tétel megadja, ami kimondja, hogy az n pontú számozott fák száma n^{n-2} , tehát jelenleg $4^2 = 16$.

b) Először azt gondoljuk meg, hogy ha adott egy négy pontú teljes gráf, akkor abban hány négy hosszúságú kör van. Legyenek a pontok pl. $A; B; C; D$. Az ezek által meghatározott teljes gráfban az alábbi négy hosszú körök vannak: $ABCD; ABDC; ACBD$. A tíz pontú teljes gráf $\binom{10}{4} = 210$ ilyen négy pontú teljes részgráfot tartalmaz, melyek mindegyike 3 darab négy hosszú kört határoz meg, ezért a válasz a kérdésre $210 \cdot 3 = 630$.

c) A fiúk és a lányok számának eltérése úgy lehet legfeljebb 2, ha 3 fiú és 2 lány vagy 2 fiú és 3 lány ír szódolgotat.

$$P(3 \text{ fiú}, 2 \text{ lány}) = P(2 \text{ fiú}, 3 \text{ lány}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{63},$$

így a keresett valószínűség $\frac{50}{63}$, ami tízezredekre kerekítve 0,7937.

d) Az előző részben $\frac{50}{63}$ adódott annak az eseménynek a valószínűségére, hogy a dolgozatot író fiúk és lányok számának eltérése legfeljebb 2. Ennek az eseménynek a komplementerének a valószínűsége $\frac{13}{63}$. Az első négy napon a komplementer esemény és az ötödik napon a kívánt esemény következik be. Az egyes napok függetleneknek tekinthetők egymástól, ezért a keresett valószínűség $\left(\frac{13}{63}\right)^4 \cdot \frac{50}{63}$, ami tízezredekre kerekítve 0,0014.

6. a) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amely nem csúcsa a hatszögnek. Mutassuk meg, hogy a P pontnak a hatszög csúcsaitól mért távolságainak négyzetösszege a P pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora. (4 pont)

Az iskolai darts szakkör táblája háromszög alakú, melynek oldalai 13, 14 és 15 egység hosszúak. Egy dobássorozat hét dobásból áll. Robi még kezdő játékos, ezért szorgalmasan gyakorol. Feltételezzük, hogy a táblát biztosan eltalálja, és a tábla minden pontját egyenlő valószínűséggel találja el.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hét dobásból legfeljebb háromszor talál bele a háromszög beírt körébe? Válaszunkat normálalakban adjuk meg. (6 pont)

A tábla különböző részeinek eltalálása más-más pontot ér.

Robi utolsó hét dobásáról tudjuk, hogy az átlaguk 120 pont. Pontosan annyi, mint az adatok mediánja. Az adathalmaz egyetlen módusza 100 pont. Két dobás során éppen az átlagnak megfelelő összeget dobott, míg a legjobb találat 160 pontra sikerült.

c) Számítsuk ki az elért pontszámok szórását. (6 pont)

Megoldás. a) Ha lerajzoljuk az ábrát, akkor könnyen látszik, hogy $AD; BE; CF$ átmérői a körnek. Thalész tétele miatt $\angle APD = \angle BPE = \angle CPF = 90^\circ$. A létrejövő derékszögű háromszögekben felírhatjuk Püthagorasz tételét: $PA^2 + PD^2 = AD^2 = 4r^2$; $PB^2 + PE^2 = BE^2 = 4r^2$; $PC^2 + PF^2 = CF^2 = 4r^2$, ahol r jelöli a körülírt kör sugarát. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 + PE^2 + PF^2 = 12r^2$, ami nyilván állandó.

b) Először meghatározzuk, mennyi annak a valószínűsége, hogy Robi beletalál a beírt körbe. A háromszög területét Héron-képlettel határozzuk meg: $s = 21$, így $T = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$. A beírt kör sugara $r = \frac{T}{s} = 4$.

$$P(\text{egy lövés beletalál a beírt körbe}) = \frac{4^2 \cdot \pi}{84} \approx 0,5984.$$

Annak a valószínűsége, hogy 7 dobásból k -szor ($k \in \{0; 1; \dots; 7\}$) talál bele a beírt körbe, binomiális eloszlással modellezhető:

$$P(k\text{-szor talál bele a beírt körbe } 7 \text{ dobásból}) = \binom{7}{k} \cdot 0,5984^k \cdot 0,4016^{7-k}.$$

Nekünk a $\sum_{k=0}^3 \binom{7}{k} \cdot 0,5984^k \cdot 0,4016^{7-k}$ összeget kell meghatározni, melynek értéke kb. 0,2929, ami normálalakban megadva $2,929 \cdot 10^{-1}$.

c) Az elért pontszámokat növekvő sorrendbe rendezve kapjuk, hogy a negyedik pontszám a 120, mivel ennyi az átlag és az átlag megegyezik a mediánal. Mivel Robi kétszer is dobott 120 pontot és az adatok egyetlen módusza 100, ezért legalább háromszor kellett 100 pontot dobni. Többször nem tudott 100-at dobni, mert a negyedik legnagyobb dobott szám biztosan az adatok mediánja, azaz 120. Tehát azt tudjuk, hogy háromszor dobott 100-at, kétszer 120-at és egyszer 160-at. Az adatok átlaga 120, ezért a kimaradt dobás csak 140 lehet. A dobások növekvő sorrendben: 100; 100; 100; 120; 120; 140; 160. Ezek szórása az ismert képlet alapján

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^7 (120 - x_i)^2}{7}} \approx 21,38.$$

7. a) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\begin{aligned} (1) \quad & 4 \cdot \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = \sqrt{ab+a+b+1}, \\ (2) \quad & 2 \cdot \sqrt{a+1} + 5 \cdot \sqrt{b+1} = 2 \cdot \sqrt{ab+a+b+1}. \end{aligned}$$

(8 pont)

b) Kedvenc együttesem legújabb albumán négy dal különösen jóra sikerült, ezért már egy ideje csak ezt a négy dalt hallgatom a telefonomon. A telefon a dalokat egymás után véletlenszerűen, egymástól függetlenül, mindegyiket $\frac{1}{4}$ valószínűséggel játssza le. Addig hallgatom a zenéket, amíg nem következik be az első ismétlődés.

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 dal kell meghallgassak, majd számítsuk ki az első ismétlésig meghallgatott dalok számának várható értékét. (8 pont)

Megoldás. a) Először átalakítjuk kissé az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 4 \cdot \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = \sqrt{(a+1) \cdot (b+1)}, \\ (2) \quad & 2 \cdot \sqrt{a+1} + 5 \cdot \sqrt{b+1} = 2 \cdot \sqrt{(a+1) \cdot (b+1)}. \end{aligned}$$

Most vizsgáljuk meg a fellépő kifejezések értelmezési tartományát. Annak kell teljesülnie, hogy $a \geq -1$ és $b \geq -1$. Ha a vagy b értéke -1 , akkor a másik értéke is csak -1 lehet és ez megoldása is az egyenletrendszernek.

Most tegyük fel, hogy $a > -1; b > -1$. Ekkor nyugodtan oszthatjuk mindkét egyenletet $\sqrt{(a+1) \cdot (b+1)}$ -gyel:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{4}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{a+1}} = 1, \\ (2) \quad & \frac{2}{\sqrt{b+1}} + \frac{5}{\sqrt{a+1}} = 2. \end{aligned}$$

Bevezetve az $\frac{1}{\sqrt{b+1}} = x; \frac{1}{\sqrt{a+1}} = y$ új ismeretleneket a

$$\begin{aligned} (3) \quad & 4x + y = 1; \\ (4) \quad & 2x + 5y = 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása: $x = \frac{1}{6}; y = \frac{1}{3}$. Innen $a = 8; b = 35$ adódik.

Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van: $a_1 = b_1 = -1$ és $a_2 = 8; b_2 = 35$.

Mindvégig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ezek és csakis ezek a megoldásai az egyenletrendszernek.

b) Jelöljük X -szel azt a valószínűségi változót, amely megadja, hogy hány dal kell meghallgatni addig, amíg bekövetkezik az első ismétlődés. Nyilván $P(X=1) = 0$ és $P(X=k) = 0$, ha $k \geq 6$, hiszen az ötödik dal meghallgatásakor biztosan ismétlődés lesz, így $P(X=6) = 0$. Kapjuk, hogy $P(X=2) = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}; P(X=3) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{3}{8}; P(X=4) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{4^4} = \frac{9}{32}; P(X=5) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{4^5} = \frac{3}{32}$. Ezek valóban eloszlást alkotnak, hiszen összegük 1.

A várható érték:

$$E(X) = \sum_{k=2}^5 k \cdot P(X=k) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{9}{32} + 5 \cdot \frac{3}{32} = \frac{103}{32} \approx 3,2.$$

8. Adott az

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x \leq 3, \\ \frac{12x^2 - 35x - 3}{x-3} + p, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

függvény.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)$ függvény folytonos legyen a valós számok halmazán. (4 pont)

Tekintsük a fenti függvényt a $[-1; 2]$ intervallumon. Legyen ez a $g(x)$ függvény.

b) Adjuk meg a $g(x)$ függvénynek az inverz függvényét. Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is. (4 pont)

Az $f(x)$ függvény 2 abszcisszájú pontjába érintőt húzunk. (Pont abszcisszája: a pont első koordinátája.)

c) Írjuk fel az érintő egyenletét. (4 pont)

d) Határozzuk meg az érintő és az $f(x)$ függvény által határolt korlátos zárt síkidom területét. (4 pont)

Megoldás. a) A függvény folytonossága egyedül az $x = 3$ pontban kérdéses. Nyilván $f(3) = 27$ és $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 = 27$. Számoljuk ki a jobboldali határértéket is, felhasználva, hogy

$$12x^2 - 35x - 3 = 12 \cdot (x - 3) \cdot \left(x + \frac{1}{12}\right) = (x - 3) \cdot (12x + 1).$$
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{12x^2 - 35x - 3}{x - 3} + p\right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{(x - 3) \cdot (12x + 1)}{x - 3} + p\right) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} (12x + 1 + p) = 37 + p.$$

A két féloldali határértéknek egyenlőnek kell lennie, tehát $37 + p = 27$, innen $p = -10$ adódik. Tehát $p = -10$ és ekkor a függvény az alábbi alakban írható fel:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x \leq 3, \\ 12x - 9, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

b) Mivel $[-1; 2] \subseteq]-\infty; 3]$, ezért $g: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Először megállapítjuk $g(x)$ értékkészletét. Mivel a függvény szigorúan monoton növekedő, ezért valóban invertálható és értékkészlete $R_g = [-1; 8]$. Innen már felírhatjuk az inverz függvényt: $g^{-1}: [-1; 8] \rightarrow [-1; 2]$, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, tehát $D_{g^{-1}} = [-1; 8]$ és $R_{g^{-1}} = [-1; 2]$.

c) A pont, ahová az érintőt húzzuk: $P(2; 8)$. Az érintő meredekségét a derivált adott pontbeli értéke adja meg. Mivel $f'(x) = 3x^2$, ha $x \leq 3$, ezért az érintő meredeksége $m = f'(2) = 12$. Az érintő egyenlete $y - 8 = 12(x - 2)$, azaz $y = 12x - 16$.

d) Először meghatározzuk, hogy hol metszi egymást az érintő és az $f(x)$ függvény. Ha $x > 3$, akkor $f(x) = 12x - 9$ és ez párhuzamos az $y = 12x - 16$ egyenletű érintővel. Tehát ekkor nem lesz metszéspont. Ha $x \leq 3$, akkor $f(x) = x^3$. Meg kell oldanunk az $x^3 = 12x - 16$ egyenletet. Segítségünkre lesz, hogy tudjuk, $x = 2$ megoldása. Ez azért igaz, mert ebben az abszcisszájú pontban érinti az érintő a függvényt.

$$x^3 - 12x + 16 = x^3 - 4x - 8x + 16 = x \cdot (x^2 - 4) - 8 \cdot (x - 2) = (x - 2)^2 \cdot (x + 4),$$

tehát a másik metszéspont $x = -4$. Véve egy próbapontot a $[-4; 2]$ intervallumból (pl. $x = 0$ -t), látható, hogy az $f(x)$ függvény grafikonja mindvégig az érintő felett halad. A kérdéses terület:

$$T = \int_{-4}^2 (x^3 - 12x + 16) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 16x \right]_{-4}^2 = 108.$$

9. Egy mértani sorozat első eleme 9, az első n elem összege $\frac{40}{3}$, ugyanezen elemek reciprokainak összege $\frac{40}{9}$.

a) Mutassuk meg, hogy a sorozat hányadosa $\frac{1}{3}$. (7 pont)

b) Határozzuk meg n értékét. (2 pont)

c) A sorozat mely elemei kisebbek $\frac{1}{2019}$ -nél? Mennyi az összege ezen elemeknek? (7 pont)

Megoldás. a) Legyen az eredeti mértani sorozat hányadosa q . Ekkor az eredeti sorozat tagjai $9; 9q; 9q^2; \dots$, míg ezen tagok reciprokai $\frac{1}{9}; \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{q}; \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{q^2}; \dots$. Látszik, hogy ez is egy mértani sorozat, melynek első eleme $\frac{1}{9}$ és hányadosa $\frac{1}{q}$. Nézzük meg, hogy lehet-e $q = 1$. Nem lehet, mert ekkor a sorozat minden tagja 9 lenne és így az első n elem összege nem lehetne $\frac{40}{3}$. Mivel $q \neq 1$, ezért használhatjuk az ismert $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képletet. Kapjuk, hogy

$$9 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{40}{3} \quad \text{és} \quad \frac{1}{9} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{40}{9}.$$

Innen adódik, hogy

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{40}{27} \quad \text{és} \quad 40 = \frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q}{q^n} = \frac{40}{27} \cdot \frac{q}{q^n},$$

azaz $q^n = \frac{q}{27}$. Ezt beírhatjuk a $\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{40}{27}$ összefüggésbe. Megoldva a

$$\frac{\frac{q}{27} - 1}{q - 1} = \frac{40}{27}$$

egyenletet adódik, hogy $q = \frac{1}{3}$.

b) Írjuk be $q = \frac{1}{3}$ -t a $q^n = \frac{q}{27}$ összefüggésbe. Kapjuk, hogy $(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{81}$, innen $n = 4$ adódik az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt. Tehát a sorozat első négy tagját adtuk össze.

Ellenőrzés a szöveg alapján.

c) Az eredeti sorozat általános tagja: $a_n = 9 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1} = 3^{-n+3}$.

Meg kell oldanunk a $3^{-n+3} < \frac{1}{2019}$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve adódik, hogy $n > 9,93$, tehát $n \geq 10$. A sorozat azon tagjai kisebbek $\frac{1}{2019}$ -nél, amelyeknek indexe legalább 10. Ezek az elemek egy mértani sorozat tagjai, a belőlük képzett mértani sor konvergens és összege:

$$\sum_{n=10}^{\infty} 3^{-n+3} = 3^{-7} + 3^{-8} + \dots = \frac{3^{-7}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{1458}.$$