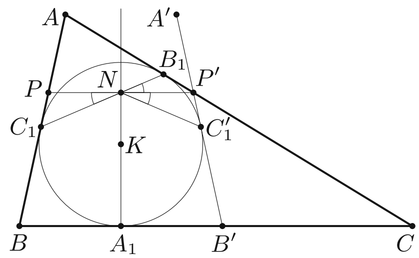
1. *Az ABC háromszög beírt köre a BC, a CA, illetve az AB oldalt rendre az A_1, a B_1, illetve a C_1 pontban érinti, A-ból induló súlyvonala pedig az M pontban metszi a B_1C_1 szakaszt. Mutassuk meg, hogy az A_1M szakasz merőleges a BC oldalra.*

I. megoldás. Ha $|AB| = |AC|$, akkor az ábra szimmetrikus az A-ból induló magasságra, amely egyben súlyvonal is. Ezért az A_1 és az M pont is ezen a szimmetriatengelyen fekszik, így az állítás triviális.

A továbbiakban feltesszük, hogy $|AB| \neq |AC|$. Ekkor az A-ból induló szögfelező nem merőleges a BC oldalra, tehát az AB-nek egy, a BC-re merőleges egyenesre vett tükörképe nem párhuzamos AC-vel.

Legyen K az ABC háromszög beírt körének középpontja, és jelölje A', B' és C_1' rendre az A, B, illetve C_1 pontoknak az A_1K egyenesre vett tükörképét. Láttuk, hogy AC és $A'B'$ nem párhuzamosak, ezért egyértelműen létezik az AC és $A'B'$ egyeneseknek egy P' metszéspontja. Legyen P a P'-nek az A_1K-ra vett tükörképe, valamint jelölje N a PP' és A_1K metszéspontját (*1. ábra*).



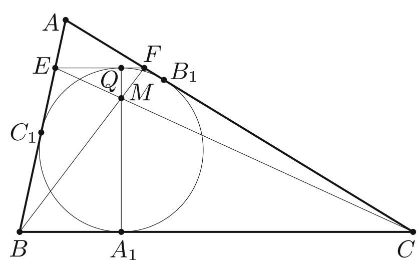
1. ábra

Ekkor $KNP'\sphericalangle = 90°$ a tükrözés miatt, illetve $KB_1P'\sphericalangle = KC_1'P'\sphericalangle = 90°$, hiszen $P'B_1$ és $P'C_1'$ a beírt kör érintői. Ezek szerint K, N, B_1, P' és C_1' egy k körön vannak, konkrétan a KP' Thálesz-körén. Ezen k körnek $P'B_1$ és $P'C_1'$ egyenlő hosszúságú húrjai (mivel mindkét szakasz a beírt körnek ugyanabból a P' külső pontból húzott érintője), tehát k-ban ugyanakkora kerületi szögek tartoznak hozzájuk: $B_1NP'\sphericalangle = C_1'NP'\sphericalangle = C_1NP\sphericalangle$; az utóbbi egyenlőség a tükrözés miatt igaz. Ezek szerint N illeszkedik a C_1B_1 szakaszra.

$BC \perp A_1K \perp PP'$ miatt $BC \parallel PP'$ és $|PN| = |P'N|$ a tükrözésből adódóan. Alkalmas, A-ból végzett középpontos hasonlóság tehát PP'-t BC-be és N-et a BC szakasz felezőpontjába viszi. Ez pedig azt jelenti, hogy N rajta van az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalán. Az N pont tehát megegyezik a B_1C_1 szakasznak és az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalának metszéspontjával, M-mel, ahonnan $A_1M = A_1N \perp BC$ adódik. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolunk. □

Az alábbiakban közöljük Egri Máté rendkívül szellemes megoldásának vázlatát is.

II. megoldás. Jelölje Q az ABC háromszög beírt körének A_1-gyel átellenes pontját, és legyenek rendre E és F a beírt körhöz Q-ban húzott (és BC-vel párhuzamos) érintőnek az AB és AC oldalakkal vett metszéspontjai (*2. ábra*).



2. ábra

Azt fogjuk megmutatni, hogy az M pont egyrészt megegyezik EC és BF metszéspontjával, másrészt, hogy illeszkedik az A_1Q szakaszra.

A konstrukció folytán $EBCF$ trapéz, így átlóinak metszéspontját a szárak metszéspontjával (azaz A-val) összekötő egyenes felezi az alapokat. Ez azt jelenti, hogy EC és BF metszéspontja illeszkedik az A-ból induló súlyvonalra.

A továbbiakban a jól ismert Brianchon-tételre támaszkodunk, amely szerint egy érintőhatszög szemközti csúcsait összekötő három átló egy ponton halad át. A tételt abban az elfajuló esetben alkalmazzuk, amikor az érintőhatszög bizonyos csúcsai a hatszög beírt körén vannak.

Ilyenformán az EC_1BCB_1F elfajuló érintőhatszög fenti tulajdonsága alapján C_1B_1 tartalmazza EC és BF metszéspontját, amely – mint láttuk – az A-ból induló súlyvonalon van. Tehát EC és BF valóban az M pontban metszik egymást. Az EBA_1CFQ érintőhatszögre pedig az adódik, hogy A_1Q is tartalmazza M-et. A feladat állítása innen közvetlenül adódik. □

2. *Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ a térbeli derékszögű koordinátarendszer egész koordinátájú, páronként különböző, p hosszúságú vektorai, ahol p prímszám. Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leq j < k \leq n$ esetén van olyan $0 < \ell < p$ egész szám, melyre a $\mathbf{v}_j - \ell \cdot \mathbf{v}_k$ vektor mindhárom koordinátája p-vel osztható. Igazoljuk, hogy $n \leq 6$.*

Megoldás. Ha $p=2$, akkor a p hosszúságú, egész koordinátájú vektorok kizárólag a $(\pm p,0,0)$, $(0,\pm p,0)$, $(0,0,\pm p)$ vektorok lehetnek, amiből pontosan hat db van. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $p\geq 3$. Figyeljük meg, hogy ha valamelyik $\mathbf{v}_j$ vektor mindhárom koordinátája p-vel osztható, akkor a feladatbeli feltétel szerint valamely $0<\ell<p$ esetén a $\mathbf{v}_j-\ell\cdot\mathbf{v}_k$ vektor mindhárom koordinátája osztható p-vel. Ekkor azonban az $\ell\cdot\mathbf{v}_k$ vektornak, következésképp a $\mathbf{v}_k$ vektornak is mindhárom koordinátája osztható p-vel, tehát a $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ vektorok mindegyikére ugyanez igaz. Tekintettel arra, hogy a p hosszúságú, p-vel osztható egész koordinátájú vektorok csupán hatfélék lehetnek (konkrétan $(\pm p,0,0)$, $(0,\pm p,0)$, $(0,0,\pm p)$), ezért feltehetjük, hogy a $\mathbf{v}_j$ vektorok egyikének sem osztható mindhárom koordinátája p-vel.

A feladatbeli feltétel miatt tetszőleges $1\leq j<k\leq n$ esetén létezik olyan $p\nmid\ell$ egész, amelyre az $\mathbf{u}=(\mathbf{v}_j-\ell\cdot\mathbf{v}_k)/p$ vektor mindhárom koordinátája egész. Ekkor (az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok skaláris szorzatát $(\mathbf{x},\mathbf{y})$-nal jelölve)

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}_j|^2=(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_j)&=(p\cdot\mathbf{u}+\ell\cdot\mathbf{v}_k,p\cdot\mathbf{u}+\ell\cdot\mathbf{v}_k)=\\&=p^2\cdot(\mathbf{u},\mathbf{u})+2p\ell\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell^2\cdot(\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)=\\&=p^2\cdot|\mathbf{u}|^2+2p\ell\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell^2\cdot|\mathbf{v}_k|^2,\end{aligned}$$

azaz

$$-2p\ell\cdot(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)=p^2\cdot|\mathbf{u}|^2+\ell^2\cdot|\mathbf{v}_k|^2-|\mathbf{v}_j|^2=p^2\cdot|\mathbf{u}|^2+\ell^2\cdot p^2-p^2=p^2\big(|\mathbf{u}|^2+\ell^2-1\big).$$

Mivel $p>2$ és $|\mathbf{u}|^2=(\mathbf{u},\mathbf{u})$ egész, ezért a fenti egyenlőség bal oldala is p^2 többszöröse, tehát $p\mid(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)$. Ekkor

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)=(p\cdot\mathbf{u}+\ell\cdot\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)&=p(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell(\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)=\\&=p(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell\cdot|\mathbf{v}_k|^2=p(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)+\ell\cdot p^2,\end{aligned}$$

így $p\mid(\mathbf{u},\mathbf{v}_k)$ okán $p^2\mid(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)$. Azonban $\big|(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)\big|\leq|\mathbf{v}_j|\cdot|\mathbf{v}_k|=p^2$ miatt $(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_k)$ csak $\pm p^2$ vagy 0 lehet. Ezért ha $\mathbf{v}_j$ és $\mathbf{v}_k$ nem párhuzamosak, akkor bizonyosan merőlegesek egymásra.

Azt kaptuk tehát, hogy a $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ vektorok meghatározta irányok páronként merőlegesek, ezért legfeljebb három ilyen irány lehetséges. Minthogy az azonos irányt meghatározó vektorok egymás ellentettjei, ezért minden irányt legfeljebb két vektor határoz meg, innen pedig közvetlenül adódik a bizonyítandó $n\leq 6$ állítás.

□

Megjegyzés. Ha $p=k^2+k+1$ valamely k pozitív egészre, akkor megadható hat olyan vektor, amelyek teljesítik a feladatbeli követelményeket, és egyikük sem párhuzamos a koordinátatengelyekkel. Könnyű ellenőrizni, hogy például a $\big(k,k+1,k(k+1)\big)$, $\big(k+1,-k(k+1),k\big)$, illetve $\big(-k(k+1),-k,k+1\big)$ ilyen vektorhármast alkot.

Általánosságban az igaz, hogy a 2 és az 5 kivételével minden p prímre létezik hat vektor a fenti tulajdonsággal. A részletekért ld. az **A. 744.,** ehavi számunkban kitűzött feladatot.

3. *A k utcából álló Aprajafalván $k(n-1)+1$ klub működik, mindegyik tagsága n törpöt számlál. Egy törp több klubnak is tagja lehet, és két törp bizonyosan ismeri egymást, ha klubtársak vagy ha ugyanabban az utcában laknak. Igazoljuk, hogy kiválasztható n különböző klub és ezeknek egy-egy tagja úgy, hogy ez az n tag páronként különböző legyen és közülük bármely kettő ismerje egymást.*

Megoldás. Legyenek a klubok $K_1,K_2,\ldots$ és válasszunk sorra minden klubból egy-egy képviselőt azzal a megszorítással, hogy minden törp legfeljebb egy klubot képviselhet. Ha e választások során a K_i klubból nem tudunk képviselőt választani, akkor az azért van, mert K_i minden egyes tagja (akik persze páronként ismerik egymást) már képvisel egy-egy különböző klubot, ezért kész vagyunk. Ha azonban mind a $k(n-1)+1$ klubból sikerül különböző képviselőt választani, akkor a skatulya-elv miatt közülük n törp ugyanabban az utcában lakik, és ezért ismerik egymást. □