Milyen valós számokra lesz a

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}} \tag{1}$$

kifejezés értéke egész szám?

I. megoldás. Jelöljük az (1) kifejezés első tagját A-val, a másodikat B-vel

$$A=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}, \qquad B=\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}, \tag{2}$$

a kifejezés értékét pedig C-vel:

$$A+B=C. \tag{3}$$

Mivel A és B szorzata minden x mellett (-1)-gyel egyenlő, ezek a mennyiségek egy adott x mellett a

$$z^2-Cz-1=0 \tag{4}$$

másodfokú egyenlet gyökei, mégpedig A a pozitív gyök, és B a negatív, hiszen x mindig kisebb $\sqrt{x^2+1}$-nél. Megfordítva, a (4) egyenletnek minden C mellett két gyöke van, és közülük az egyik pozitív, a másik negatív, hiszen C kisebb $\sqrt{C^2+4}$-nél.

Ezek szerint tetszőleges valós C-hez pontosan egy olyan $(A,\ B)$ számpár tartozik, amelyre $A+B=C$, $AB=-1$, és $B<0<A$ is teljesül, és ez a számpár a következő:

$$A=\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2+1}, \qquad B=\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2+1}. \tag{5}$$

Ha van olyan x, amelyre (2) teljesül az így megválasztott A, B számpárhoz, akkor a (2)-ből következő

$$A^3=x+\sqrt{x^2+1}, \qquad B^3=x-\sqrt{x^2+1}$$

összefüggések miatt az csak az

$$x=\frac{1}{2}(A^3+B^3) \tag{6}$$

szám lehet. Megmutatjuk, hogy ez mindig megfelel.

Lehet tehát C tetszőleges valós szám, és A, B, x legyenek a belőle (5) és (6) szerint előállított számok. Számítsuk még ki az

$$y=\frac{1}{2}(A^3-B^3)$$

számot, akkor $B<0<A$ miatt $y>0$, és

$$y^2-x^2=(y-x)(y+x)=-A^3B^3=+1$$

miatt $y=\sqrt{x^2+1}$, tehát a (6) szerint számolt x-re valóban teljesül (2). Mivel A és B (4) gyökei,

$$x=\frac{1}{2}(A^3+B^3)=\frac{1}{2}[(A+B)^3-3AB(A+B)]=\frac{1}{2}(C^3+3C).$$

Tehát az (1) alatti kifejezés értéke minden valós C számmal pontosan egy x mellett egyenlő, és ez az $x=\frac{1}{2}(C^3+C)$ érték. Érvényes ez természetesen egész C-re is, és akkor mint az könnyen látható, x is egész.

II. megoldás. Jelöljük most is az adott kifejezés értékét C-vel. Az összeg két tagjának szorzata éppen -1, tehát az $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ összefüggés alapján

$$C^3=(x+\sqrt{x^2+1})+(x-\sqrt{x^2+1})-3C,$$

ahonnan

$$x=\frac{1}{2}(C^3+3C). \tag{7}$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha (1) kifejezés értéke a C szám, akkor x a (7) alakban írható. Azt állítjuk, hogy bármely egész C-re a (7) alatti x értékre az (1) kifejezés értéke egész szám lesz (nevezetesen éppen C). Ha ezt megmutattuk, akkor ezzel a feladat kérdésére is válaszoltunk: pontosan azokra az x valós számokra lesz (1) értéke egész, melyek a (7) alakba írhatók.

Az utóbbi állítás igazolásához legyen a (7) alatti x értékre az (1) kifejezés értéke éppen D. Ekkor x értéke (7) alapján $\frac{1}{2}(D^3+3D)$-vel is egyenlő. Az x-re kapott két érték különbsége

$$0=\frac{1}{2}(C^3+3C)-\frac{1}{2}(D^3+3D)=\frac{1}{4}(C-D)[C^2+D^2+(C+D)^2+6],$$

ahonnan $C=D$, ahogyan állítottuk.

Megjegyzés. A dolgozatok legtöbbjében a versenyzők megelégedtek azzal, hogy a (7) összefüggésig eljutottak, de nem igazolták, hogy bármely egész C esetén megfelelő x-hez jutunk. A (7)-t előállító levezetés ugyanis *nem megfordítható;* nem ekvivalens átalakításokat végeztünk, s így elképzelhető, hogy egy (7) által meghatározott helyen (1) nem C-t, hanem valamilyen más értéket vesz fel. Hogy ez nem így van, az külön bizonyításra szorul.