Második nap[1]

4. Helynek *nevezzük a sík minden olyan (x, y) pontját, amelyre x és y olyan pozitív egészek, melyek mindegyike kisebb vagy egyenlő, mint* 20.

Kezdetben a 400 *hely mindegyike szabad. Anna és Balázs felváltva zsetonokat raknak a helyekre, Anna kezd. Anna minden lépésekor egy új piros zsetont helyez egy még szabad helyre olymódon, hogy semelyik két piros zseton helyének távolsága se legyen $\sqrt{5}$-tel egyenlő. Balázs minden lépésekor egy új kék zsetont helyez egy még szabad helyre. (Egy kék zseton által elfoglalt hely távolsága bármely másik foglalt helytől tetszőleges lehet.) A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos nem tud lépni.*

Határozzuk meg a legnagyobb K értéket, amelyre igaz az, hogy Anna biztosan el tud helyezni K darab piros zsetont, bárhogyan is játszik Balázs.

Egri Máté megoldása. Azt bizonyítjuk, hogy $K = 100$.

Két hely távolsága akkor $\sqrt{5}$, ha „lólépésre” vannak egymástól, azaz kettőt az egyik irányba, egyet pedig arra merőlegesen lépünk. Tehát ha a helyeket „sakktáblaszerűen” kiszínezzük, akkor bármely két hely, aminek távolsága $\sqrt{5}$, különböző színű. Ekkor ha Anna azt a stratégiát követi, hogy csak a fekete helyekre rak (amikből 200 van), akkor legalább azok felére tud rakni, azaz 100 helyre. Tehát $K \geq 100$.

A 20×20-as táblát feloszthatjuk 25 db 4×4-es táblára. Bebizonyítjuk, hogy egy 4×4-es táblán Balázs garantálni tudja, hogy Anna csak 4 helyre tudjon tenni.

Ha így betűzzük meg a 4×4-es táblát és Balázs mindig Anna lépésével a tábla középpontjára tükrös helyre rak, akkor Anna már nem rakhat többször ugyanolyan betűre, így valóban legfeljebb négyszer rakhat. 25 db 4×4-es tábla van, tehát $K \leq 100$.

Mivel $K \geq 100$ és $K \leq 100$, ezért $K = 100$.

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

5. *Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egészeknek egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan $N > 1$ egész, hogy minden $n \geq N$-re*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van egy olyan M pozitív egész, hogy $a_m = a_{m+1}$ minden $m \geq M$-re.

Matolcsi Dávid megoldása. $S(n)$-nek nevezem a feladatban definiált összeget. $N < n$-re $S(n)$ és $S(n+1)$ is egész, így

$$S(n+1) - S(n) = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}$$

is mindig egész.

Legyen $(a_1, a_n) = x$ és $a_1 = xa'_1$, illetve $a_n = xa'_n$. Ekkor

$$a'_1(S(n+1) - S(n)) = \frac{xa'_n a'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} - a'_n$$

egész szám. Tehát

$$\frac{xa'_n a'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x}$$

is egész.

Legyen most $(a_{n+1}, x) = y$ és $a_{n+1} = ya'_{n+1}$, illetve $x = yx'$. Így

$$\frac{xa'_n a'_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} = \frac{a'_n a'_1}{a'_{n+1}} + \frac{a'_{n+1}}{x'} = \frac{x' a'_n a'_1 + a'^2_{n+1}}{x' a'_{n+1}}$$

egész. Tehát $x' \mid a'^2_{n+1}$. Másrészt tudjuk, hogy $(a'_{n+1}, x') = 1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $x' = 1$, tehát $x = y$, azaz $x \mid a_{n+1}$.

Ezzel általánosan beláttuk, hogy $(a_1, a_k) \mid a_{k+1}$. Másrészt értelemszerűen $(a_1, a_k) \mid a_1$, így $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_{k+1})$.

Teljes indukció szerint tehát ha $k < t$, akkor $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_t)$.

Mivel a_1-nek csak véges sok osztója van, az (a_1, a_t) sorozat pedig végtelen és monoton növekvő, létezik egy r korlát, amitől kezdve minden $(a_t, a_1) = x$ egyenlő. Így ettől kezdve minden $a_t = xa'_t$, ahol $(a'_t, a'_1) = 1$ (ahol $a_1 = xa'_1$). Ekkor

$$\frac{a_t}{a_{t+1}} + \frac{a_{t+1} - a_t}{a_1} = \frac{a'_t}{a'_{t+1}} + \frac{a'_{t+1} - a'_t}{a'_1} = \frac{a'_t a'_1 + a'^2_{t+1} - a'_t a'_{t+1}}{a'_{t+1} a'_1}$$

[1] Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

egész.

Ez azt jelenti, hogy $a'_{t+1} \mid a'_t a'_1$. Mivel $(a'_{t+1}, a'_1) = 1$, ezért $a'_{t+1} \mid a'_t$. Ez az r korláttól kezdve folyamatosan igaz, így $a'_t \mid a'_r$ és az a'_t sorozat monoton csökkenő. Mivel a'_r-nek csak véges sok osztója van, a végtelen a'_t sorozatnak egy M korlát után minden eleme egyenlő lesz.

Így $M < m$-re minden $a_m = x a'_m$ is egyenlő lesz, ezzel az állítást beláttuk.

6. *Az $ABCD$ konvex négyszögre teljesül $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Az X pont az $ABCD$ négyszög olyan belső pontja, amelyre teljesül*

$$XAB\sphericalangle = XCD\sphericalangle \quad \text{és} \quad XBC\sphericalangle = XDA\sphericalangle.$$

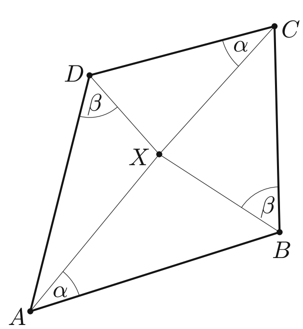
Bizonyítsuk be, hogy $BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = 180°$.

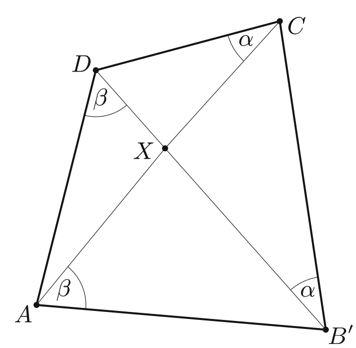
Gáspár Attila megoldása.

Legyen $XAB\sphericalangle = XCD\sphericalangle = \alpha$ és $XBC\sphericalangle = XDA\sphericalangle = \beta$. Vegyük fel a B' pontot az *ábra* szerint úgy, hogy $XB' = \dfrac{XA \cdot XC}{XB}$ és $AXB'\sphericalangle = BXC\sphericalangle$. Ekkor

$$\frac{AX}{B'X} = \frac{AX \cdot XB}{XA \cdot XC} = \frac{XB}{XC} m$$

ezért $AXB' \sim BXC$. Emiatt $B'AX\sphericalangle = CBX\sphericalangle = \beta$, és $AB' = BC \cdot \dfrac{AX}{BX}$.





$$\begin{aligned} B'XC\sphericalangle &= AXB'\sphericalangle + B'XC\sphericalangle - AXB'\sphericalangle = \\ &= AXB\sphericalangle + BXC\sphericalangle - BXC\sphericalangle = AXB\sphericalangle, \quad \text{és} \\ \frac{B'X}{CX} &= \frac{XA \cdot XC}{XB \cdot XC} = \frac{XA}{XB}, \end{aligned}$$

ezért $B'XC \sim AXB$. Így $XB'C\sphericalangle = \alpha$ és $B'C = AB \cdot \dfrac{XC}{XB}$. Látható, hogy $DCB'\sphericalangle = \alpha + XCB'\sphericalangle = 180° - B'XC\sphericalangle$, ezért $\sin DCB'\sphericalangle = \sin BXC'\sphericalangle$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{T_{B'CD}}{T_{XB'C}} &= \frac{DC \cdot CB' \cdot \sin DCB'\sphericalangle}{B'X \cdot XC \cdot \sin B'XC\sphericalangle} = \frac{DC \cdot CB'}{B'X \cdot XC} = \\ &= \frac{DC \cdot AB \cdot \frac{XC}{XB}}{B'X \cdot XC} = \frac{CD \cdot AB}{XB' \cdot XB}. \end{aligned} \tag{1}$$

A területeket másképp felírva

$$\frac{T_{B'CD\triangle}}{T_{XB'C\triangle}} = \frac{B'D \cdot B'C \cdot \sin CB'D\sphericalangle}{B'X \cdot B'C \cdot \sin\alpha} = \frac{B'D}{B'X} \cdot \frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletet összevetve kapjuk, hogy

$$\frac{CD \cdot AB}{XB' \cdot XB} = \frac{B'D}{B'X} \cdot \frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha},$$

$$\frac{CD \cdot AB}{B'D \cdot XB} = \frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Hasonlóan látható, hogy

$$\frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{AD \cdot AB'}{DX \cdot XA} = \frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX}, \tag{4}$$

$$\frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}. \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta},$$

$$\frac{AD \cdot BC}{B'D \cdot XB} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}. \tag{6}$$

$AB \cdot CD = AD \cdot BC$, ezért a (3) és (6) egyenlet miatt

$$\frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}. \tag{7}$$

Tegyük fel, hogy $X \notin B'D$. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy X a $B'CD$ háromszögben van. Ekkor $CB'D\sphericalangle > \alpha$, ezért $\sin CB'D\sphericalangle > \sin\alpha$, és $ADB'\sphericalangle < \beta$, ezért $\sin ADB'\sphericalangle < \sin\beta$. Ez ellentmond a (7) egyenletnek. Tehát X a $B'D$ szakaszon van. Ebből a feladat állítása könnyen adódik, mert

$$BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = B'XC\sphericalangle + CXD\sphericalangle = 180°.$$

Megjegyzés. Ha $0° < \varphi_1 < \varphi_2 < 180°$, akkor csak abban az esetben lehetséges, hogy $\sin\varphi_1 \geq \sin\varphi_2$, ha $\varphi_1 + \varphi_2 \geq 180°$. Látható, hogy $CB'D\sphericalangle + \alpha < CB'D\sphericalangle + \alpha + XCB'\sphericalangle = 180° - B'DC\sphericalangle < 180°$, és hasonlóan $ADB'\sphericalangle + \beta < 180°$. Emiatt ez az eset nem fordulhat elő a fenti bizonyításban.