Megoldásvázlatok
a 2019/1. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	D	D	C	C	D	D	A	C	C	B	B	D	D

Számolásos feladatok

1. *a*) Először foglalkozzunk a gyorsulás–idő grafikonnal (*1. ábra*)! A gyorsulás definíciója:

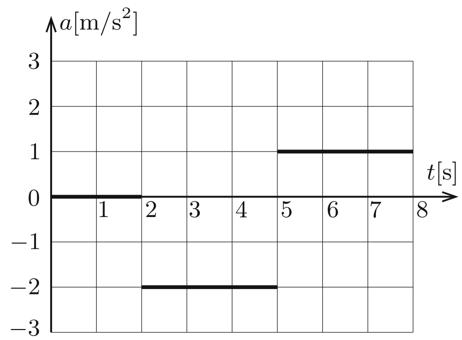
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

A sebesség–idő grafikonon látható, hogy a függvény lineáris szakaszokból áll, ezeken a szakaszokon tehát a gyorsulás állandó:

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{\left(3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - \left(3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(2\ \text{s}) - 0} = 0,$$

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \frac{\left(-3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - \left(3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(5\ \text{s}) - (2\ \text{s})} = \\ = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t} = \frac{0 - \left(-3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(8\ \text{s}) - (5\ \text{s})} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



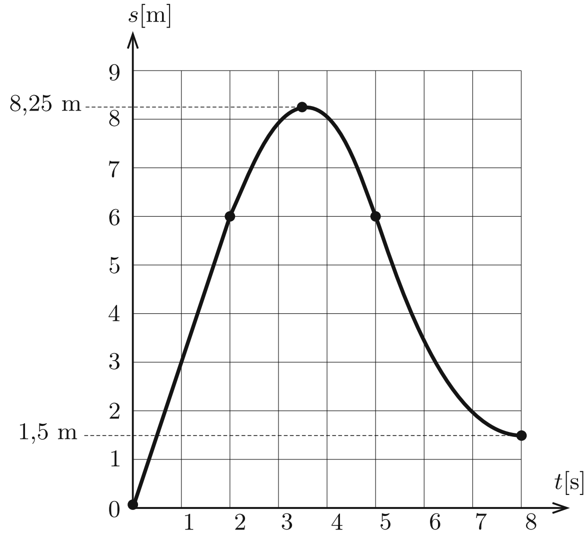
1. ábra

Az elmozdulás–idő grafikon (*2. ábra*) elkészítését a következő megállapítások segítik:

1. A test 3,5 s ideig előre halad, majd ezután irányt változtat, és visszafelé mozog.

2. A mozgás első szakasza egyenletes mozgás, a többi része egyenletesen változó, ezért az első rész grafikonja egyenes szakasszal, a többi része pedig parabolával szemléltethető.

3. A megtett utak legegyszerűbben a sebesség–idő függvény grafikonjának „görbe alatti területéből” számíthatók.



2. ábra

Célszerű a mozgást 4 részre bontani:

0-tól 2 s-ig: az elmozdulás 6 m. A grafikon ezen szakasza egy pozitív meredekségű egyenes,

2 s-tól 3,5 s-ig: az elmozdulás 2,25 m, és az intervallum végén a sebesség nulla.

3,5 s-tól 5 s-ig: az elmozdulás $-2{,}25$ m, hiszen a test már visszafele mozog. Az állandó negatív gyorsulás miatt a 2 s $< t <$ 5 s-os intervallumban az elmozdulás–idő függvény lefelé nyíló parabolával szemléltethető.

5 s-tól 8 s-ig: az elmozdulás $-4{,}5$ m. A test sebessége negatív, tehát a test továbbra is visszafelé mozog. A gyorsulás viszont pozitív, a grafikon felfelé nyíló parabola. A végsebesség nulla, a grafikon érintője $t = 8$ s pillanatban vízszintes.

b) Az átlagos sebességnagyság definíció szerint a megtett út és a megtételéhez szükséges idő hányadosa:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\sum |\Delta s|}{\sum \Delta t} = \frac{6\ \text{m} + 2{,}25\ \text{m} + 2{,}25\ \text{m} + 4{,}5\ \text{m}}{8\ \text{s}} \approx 1{,}88\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés. A fenti módon számított „átlagsebességet” mutatják az GPS-es navigációs eszközök és az útvonaltervező okostelefonok, ezt tartják számon a zárt hurok alakú pályán haladó autóversenyzők és a kerékpárosok is. Nem tévesztendő össze ez a mennyiség az elmozdulásvektor és a mozgás összidejének hányadosával, ami vektoriális mennyiség. Egy olyan futóversenynél, ahol a rajt és a cél ugyanott van, a vektoriális átlagsebesség nyilván nulla, míg a sebesség nagyságának átlaga attól eltérő érték.

2. *a*) Az áramforrás effektív teljesítménye (a szokásos jelöléseket használva) a következőképpen adható meg:

$$P_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\varphi = I_{\text{eff}} Z \cdot I_{\text{eff}} \cdot \frac{R}{Z} = I_{\text{eff}}^2 R.$$

Innen

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{P_{\text{eff}}}{R}} = \sqrt{\frac{15\ \text{W}}{60\ \Omega}} = 0{,}5\ \text{A} \qquad \text{és} \qquad Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{230\ \text{V}}{0{,}5\ \text{A}} = 460\ \Omega.$$

Az impedancia ismeretében meghatározható a tekercs induktív ellenállása:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(460\ \Omega)^2 - (60\ \Omega)^2} = 456\ \Omega,$$

és az áramforrás frekvenciája:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{456\ \Omega}{0{,}25\ \text{H}} = 290\ \text{Hz}.$$

b) A feszültség és az áramerősség közötti fáziseltolódás szöge:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{60\ \Omega}{460\ \Omega} = 0{,}13 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 82{,}5^\circ.$$

A soros $R - L$ körben a szinuszosan váltakozó áramerősség fázisa tehát 82,5°-kal *késik* a kapocsfeszültséghez képest.

3. *a*) Az állapotegyenlet szerint $pV = nRT$, ahonnan a hidrogéngáz mólszáma (a kezdeti állapot adatait felhasználva):

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(4\cdot 10^5\ \text{Pa})(2{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3)}{8{,}31\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\cdot 400\ \text{K}} = 0{,}30\ \text{mol}.$$

Ennyi gázban

$$N = n\cdot N_{\text{A}} = 0{,}30\cdot(6\cdot 10^{23}) = 1{,}8\cdot 10^{23}$$

hidrogénmolekula található.

b) A 2-es állapot hőmérsékletét az egyesített gáztörvény segítségével határozhatjuk meg:

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = 384\ \mathrm{K},$$

a belső energiák aránya pedig

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{384\ \mathrm{K}}{400\ \mathrm{K}} = 0{,}96.$$

4. *a*) A test egyensúlyban van, ha a rá ható erők kiegyenlítik egymást. A szimmetria miatt a rugóerők vízszintes összetevőire az egyensúly feltétele biztosan teljesül. A függőleges irányú összetevőkre

$$2F_{\mathrm{rugó}} \cdot \sin\alpha = mg, \quad \text{ahol} \quad F_{\mathrm{rugó}} = D\,\Delta x = D(x - x_0)$$

és α a rugó vízszintessel bezárt szögét jelenti. A rugó megnyúlt hossza Pitagorasz tétele szerint

$$x = \sqrt{x_0^2 + h^2} = \sqrt{(60\ \mathrm{cm})^2 + (20\ \mathrm{cm})^2} = 63{,}2\ \mathrm{cm}.$$

Innen a rugóerő

$$F_{\mathrm{rugó}} = 200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (0{,}632\ \mathrm{m} - 0{,}6\ \mathrm{m}) = 6{,}4\ \mathrm{N}.$$

A test tömege:

$$m = \frac{2F_{\mathrm{rugó}} \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 6{,}4\ \mathrm{N}\ \frac{20\ \mathrm{cm}}{63{,}2\ \mathrm{cm}}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}41\ \mathrm{kg}.$$

b) A test sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a gyorsulása éppen nulla. Ez az erőegyensúlynak megfelelő, a kiindulási helyzethez képest h mélységű helyzetben következik be. Itt a test gravitációs helyzeti energiája a kezdeti értékhez viszonyítva

$$E_{\mathrm{helyzeti}} = -mgh = -0{,}81\ \mathrm{J},$$

a rugók rugalmas energiája pedig

$$E_{\mathrm{rugó}} = 2 \cdot \frac{1}{2} D(x - x_0)^2 = 200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (0{,}632\ \mathrm{m} - 0{,}6\ \mathrm{m})^2 = 0{,}20\ \mathrm{J}.$$

A mechanikai energia megmaradási tétele szerint

$$E_{\mathrm{helyzeti}} + E_{\mathrm{rugó}} + \frac{1}{2} m v^2 = 0,$$

ahonnan a test maximális sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2}{0{,}41\ \mathrm{kg}} (0{,}81\ \mathrm{J} - 0{,}20\ \mathrm{J})} \approx 1{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) Ha a test eljutna $H = 40$ cm mélységbe, a helyzeti energiája

$$E_{\mathrm{helyzeti}} = -mgH = -1{,}62\ \mathrm{J}$$

lenne, a rugók rugalmas energiája pedig

$$E_{\mathrm{rugó}} = 2 \cdot \frac{1}{2} D\left(\sqrt{x_0^2 + H^2} - x_0\right)^2 = 2{,}93\ \mathrm{J}.$$

Ezek szerint a test mozgási energiája ezen a helyen

$$\frac{1}{2} m v^2 = 1{,}62\ \mathrm{J} - 2{,}93\ \mathrm{J} = -1{,}31\ \mathrm{J} < 0$$

lenne, ami nem lehetséges. A test tehát *nem ér el* 40 cm mélységbe.

Megjegyzés. Első pillanatra talán meglepő az eredmény, mert a 40 cm-es mélység éppen az egyensúlyi helyzet 20 cm-es mélységének kétszerese. Ugyanakkor vegyük figyelembe, hogy a test mozgása *nem* harmonikus rezgőmozgás, mert a két rugó által kifejtett eredő erő nem egyenesen arányos a test elmozdulásával. Numerikus vagy grafikus közelítő módszerekkel belátható, hogy a test legfeljebb $h_{\max} \approx 32$ cm mélységig süllyed le a rugók vízszintes helyzetének megfelelő helyzete alá.

Markovits Tibor
Budapest