

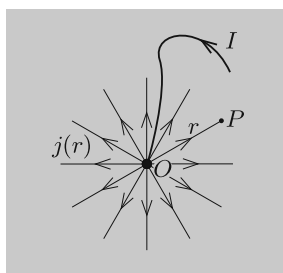
## Síkbeli elektromos vezetési problémák II. rész (fizikai alkalmazások)

A cikk I. (a múlt havi számunkban megjelent) részében általánosságban tárgyaltuk, hogy miként használhatók fel a sík arány- és szögtartó transzformációi különböző síkbeli áramlási (elektromos vezetési, hővezetési és folyadékáramlási) problémák összekapcsolására, és konkrétan megadtunk néhány ilyen transzformációt (ún. konform leképezést). Most alkalmazzuk ezeket fizikai problémák megoldására. A tárgyalást kiegészítjük még két – bizonyos esetekben nagyon hasznos – eljárás ismertetésével: a szimmetriák figyelembe vételének lehetőségével, illetve a tükrözési módszer alkalmazásával.

### Végtelen síklap

Vezessünk be egy nagy kiterjedésű, vékony ( $\delta$  vastagságú és  $\rho$  fajlagos ellenállású), homogén és izotrop síklapba egy  $O$  pontban  $I$  erősségű áramot. Határozzuk meg két, a síklap felületén lévő pont közötti feszültséget! A *forgási szimmetria* miatt az  $O$  pont körül *sugaras* áramlási tér alakul ki (5. ábra), azaz ettől a ponttól  $r$  távolságra a felületi áramsűrűség

$$(1) \quad j(r) = \frac{I}{2r\pi\delta},$$



5. ábra

hiszen a bevezetett  $I$  erősségű áram a  $2r\pi\delta$  felületen keresztül, szimmetrikusan áramlik szét a lapban.

Ahhoz, hogy két tetszőleges pont között meghatározzuk a feszültséget, szükségünk van az (ugyancsak forgásszimmetrikus, emiatt sugaras irányítottságú) elektromos térerősség  $E(r)$  nagyságára. A differenciális Ohm-törvény szerint  $\mathbf{j}(r) = \mathbf{E}(r)/\rho$ , így tehát

$$E(r) = \frac{\rho I}{2r\pi\delta}.$$

A lemez tetszőleges  $P$  pontjának potenciálját a térerősség segítségével adhatjuk meg:

$$(2) \quad \Phi(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr = - \frac{\rho I}{2\pi\delta} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r},$$

ahol  $r_0$  egy önkényesen választott  $Q$  pont  $O$ -tól mért távolsága,  $r$  pedig a  $P$  pont távolsága az áram bevezetési pontjától. A potenciált a  $Q$  pontban nullának választjuk. Ezzel, ha a két pont  $r_1$ , illetve  $r_2$  távolságra van  $O$ -tól, a közöttük lévő feszültség:

$$(3) \quad U_{1,2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

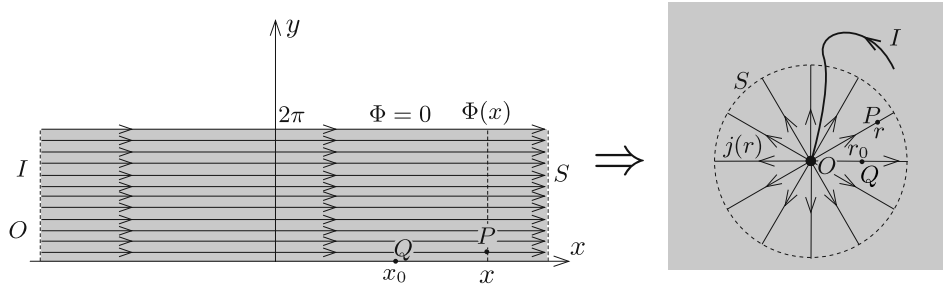
Ugyanezt az eredményt a cikk I. részében leírt „szalag-leképezés” segítségével is megkaphatjuk. Ha egy  $2\pi$  széles,  $\delta$  vastagságú, vezető szalagban összesen  $I$  áram folyik<sup>1</sup>, akkor a szalag széleivel párhuzamos irányú áramsűrűség nagysága mindenhol  $j_0 = I/(2\pi\delta)$ , az elektromos térerősség tehát

$$\mathbf{E} = (E_x, 0); \quad E_x = \rho j_0 = \frac{I\rho}{2\pi\delta}.$$

Ennek megfelelően az elektromos potenciál a szalag  $x$  koordinátával rendelkező  $P$  pontjában (ha az  $x_0$  helyen a potenciált nullának vesszük):

$$\Phi(x) = (x_0 - x) \cdot E_x = (x_0 - x) \frac{I\rho}{2\pi\delta}.$$

<sup>1</sup>Ilyen árameloszlás úgy hozható létre, hogy a nagyon („végtelenül”) hosszú szalag elegendően távoli végeinél sok, kicsi, jól vezető, a szalag hosszanti oldaléleire merőleges egyenes mentén elhelyezkedő elektródákra akkora feszültséget kapcsolunk, ami éppen  $I$  erősségű áramot eredményez.



6. ábra

Alkalmazzunk most egy olyan leképezést, ami a szalagot a végtelen síklapba viszi át (6. ábra). Az  $r = e^x$  összefüggésnek megfelelően (az „új koordináták” jelölésénél az egyszerűség kedvéért a vesszőket nem írjuk ki) az áram  $O$  bevezetési pontjai ( $x = -\infty$ ) a síklap origójába ( $r = 0$ ), az  $S$  kivezetési pontok ( $x = +\infty$ ) pedig egy „végtelen távoli” körbe mennek át. A potenciál az origótól  $r = e^x$  távol lévő  $P$  pontjában

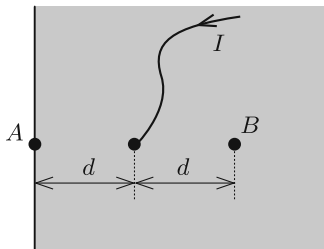
$$\Phi(r) = (x_0 - x) \frac{\rho I}{2\pi\delta} = \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r}$$

(ahol  $r_0 = e^{x_0}$ ), két tetszőleges pont közötti feszültség pedig

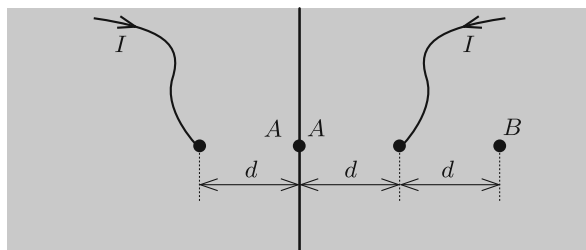
$$U_{1,2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

ahogy ezt már – más módszerrel – korábban megkaptuk.

Tekintsük a 7. ábrán látható, félvégtelen síklapot (végtelen félsíkot), amelybe a szélétől  $d$  távol lévő pontnál  $I$  erősségű áramot vezetünk, és számítsuk ki az  $A$  és  $B$  pontok közötti feszültséget. Ebben az esetben az áramsűrűség meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy a lemez szélén az áramsűrűség-vektornak nem lehet határfelületre merőleges komponense. Ha viszont a félvégtelen síklapot az áramot bevezető elektródával együtt *tükrözzük* a lap szélére (határvonalára) a 8. ábrán látható módon, a félvégtelen síklap végtelen síklapba vihető át úgy, hogy az áramsűrűség-eloszlás az eredeti lemezben változatlan marad, miközben a határfeltétel is teljesül.



7. ábra



8. ábra

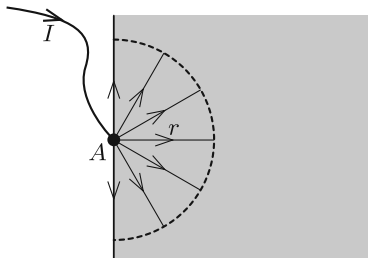
A tükrözés után kapott „teljes sík” elrendezésben mindkét elektróda hatását figyelembe kell vennünk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy először csak az egyik, majd csak a másik elektróda jelenlétét tekintjük, és minden pontban a két eset potenciál- és árameloszlásának összegét, *szuperpozícióját* vesszük.<sup>2</sup> Mivel mindkét elektródán az áram a lemezbe befelé folyik, ezért a potenciálok előjelei azonosak. Tehát a végtelen síklapnál levezetett képlet alapján a feszültség nagysága (abszolút értéke)

$$U_{AB} = \left| \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{d}{d} + \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{d}{3d} \right| = \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln 3.$$

<sup>2</sup> A szuperponálhatóság azért „működik”, mert az elektromos vezetést leíró Ohm-törvény lineáris.

Érdemes megemlíteni, hogy abban az esetben, ha az áramot a lemez szélén lévő  $A$  pontban vezetjük be, akkor nemcsak a feszültséget, hanem az áramsűrűséget is könnyen megadhatjuk. Ilyenkor ugyanis a határvonalra történő tükrözés után egy végtelen síklemezt kapunk, amelybe most  $2I$  áramot vezetünk be az  $A$  pontban. Ennél ismerjük, hogy az áramsűrűség sugaras szerkezetű, és mivel a tükrözés során a félvégtelen lemezben az áramsűrűség eloszlása nem változik, ott a 9. ábrán látható árameloszlás alakul ki:

$$(4) \quad j(r) = \frac{2I}{2r\pi\delta} = \frac{I}{r\pi\delta}.$$



9. ábra

A végtelen síklemez esetéhez hasonlóan a félvégtelen lemez egy tetszőleges pontjának potenciálja

$$(5) \quad \Phi(r) = \frac{\rho I}{\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r},$$

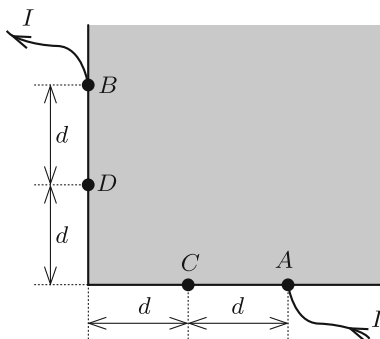
és ennek megfelelően két pont közötti potenciálkülönbség

$$(6) \quad U_{1,2} = \frac{\rho I}{\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

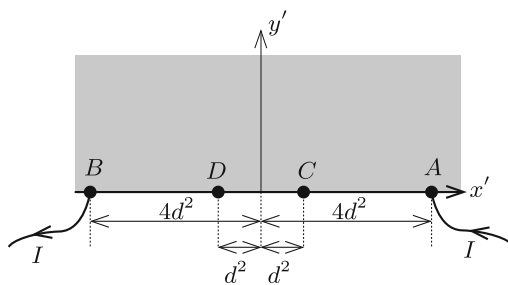
### Derékszögű sarok

Határozzuk meg 10. ábrán látható, nagy kiterjedésű fémlemez derékszögű sarkánál lévő  $C$  és  $D$  pontok közötti feszültséget, ha az  $A$  pontba bevezett áramot a  $B$  pontban vezetjük el. A feladat tükröelektródákkal történő megoldása megtalálható [1]-ben. Most azonban a transzformációs módszert fogjuk alkalmazni.

A vizsgálandó elrendezés egy legyező-leképezéssel ( $n = 2$ -szeresére kinyitott legyezővel) átvihető egy végtelen félsíkba (11. ábra), ami tükrözéssel végtelen síklappá transzformálható. A derékszögű hajlat egyik széle,



10. ábra



11. ábra

ami az  $x$  tengely mentén fekszik, a vele párhuzamos  $x'$  tengelybe transzformálódik, de a rajta fekvő  $C$  és  $A$  pontok az origótól nem  $d$  és  $2d$  távolságra, hanem rendre  $d^2$  és  $4d^2$  távolságra kerülnek. A másik,  $y$  tengely mentén lévő oldal a leképezés után a  $-x'$  tengelyre kerül, és a rajta elhelyezkedő  $D$  és  $B$  pontok az origótól rendre  $d^2$  és  $4d^2$  távolságra lesznek. Mivel eredetileg az áram be- és kimeneti pontjai a lemez szélein vannak, ezért a (6) egyenletet kell használnunk. Először csak a bemenő áram hatását vizsgáljuk, majd a kimenő áramét ellentétes előjellel, és a két eset szuperpozíciójával kapjuk meg a végeredményt. A feszültség nagysága:

$$U_{CD} = \left| \frac{\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{3d^2}{5d^2} - \frac{\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{5d^2}{3d^2} \right| = \frac{2\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{5}{3}.$$

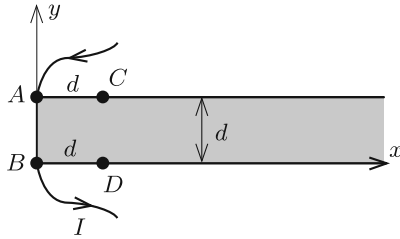
Az eredmény megegyezik az [1]-ben meghatározottal.

A  $\varphi \rightarrow n\varphi$  és  $r \rightarrow r^n$  ( $n \neq 0$ ) általánosított legyező-leképezést felhasználhatjuk  $\pi/n$  szögű sarokkal rendelkező, nagy méretű lemezbe vezetett áramok esetén. Ilyenkor a csúcsos szöglet félvégteles síkba megy át. Akkor is jól használható a legyező-leképezés, ha egy nagy méretű, de vékony lemezből kialakított kúp palástjába vezetünk áramot, hiszen az áram bevezetési pontjával szemközti alkotó mentén felvágva a kúp palástját és kiterítve azt, egy sík lemezsarkot kapunk. A felvágott palást újonnan keletkezett két határvonalán nem folyhat át áram, éppen úgy, mint – a szimmetria miatt – a felvágatlan kúppalást megfelelő alkotóján sem folyt át áram eredetileg.

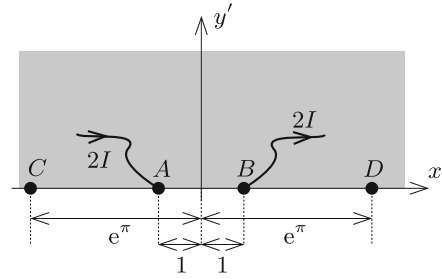
### Félvégteles szalag

A 12. ábrán látható,  $x - y$  síkban elhelyezkedő,  $d$  szélességű, félvégteles szalag  $A$  csúcsába  $I$  erősségű áramot vezetünk be, a  $B$  csúcsából pedig elvezetjük azt. Határozzuk meg, mekkora lesz a feszültség a csúcsoktól  $d$  távolságban lévő  $C$  és  $D$  pontok között!

Tükrözzük először a szalagot az  $y$ -tengelyre, hogy félvégteles helyett a  $-\infty < x < +\infty$  abszcisszákkal jellemzett, mindkét irányban végteles szalagot kapjunk. Ez együtt jár azzal, hogy az  $A$  pontban  $2I$  erősségű áramot vezetünk be, és a  $B$  pontból pedig  $2I$ -t vezetünk ki. Ezzel az áramvonal-eloszlás az eredeti szalagban nem változik meg. Célunk az, hogy a szalag pontjai a leképezés után az  $x' - y'$  koordinátarendszer  $y' \geq 0$  félsíkjában helyezkedjenek el, azaz az egyes pontok koordinátái  $x' = r' \cos \varphi'$ ,  $y' = r' \sin \varphi'$  legyenek, ahol  $r' \in [0; \infty[$  az origótól mért távolság,  $\varphi' \in [0; \pi]$  a helyvektor és a pozitív  $x'$  tengely által bezárt szög. A tükrözött szalag egyes pontjainak koordinátái a leképezés előtt:  $x \in ]-\infty; \infty[$  és  $y \in [0; d]$ .



12. ábra



13. ábra

A megfelelő leképezés két lépésben valósítható meg. Alkalmazzunk először egy  $\lambda = \pi/d$  léptékű nyújtást, ekkor a szalag szélessége  $\pi$ -re változik, majd alkalmazzuk a szalag-leképezést!

Az áram be- és kivezetési, illetve a feszültségmérés pontjainak transzformációja:

$$\begin{aligned} A: & (x = 0, y = d) \Rightarrow (x = 0, y = \pi) \Rightarrow (r = 1, \varphi = \pi), \\ B: & (x = 0, y = 0) \Rightarrow (x = 0, y = 0) \Rightarrow (r = 1, \varphi = 0), \\ C: & (x = d, y = d) \Rightarrow (x = \pi, y = \pi) \Rightarrow (r = e^\pi, \varphi = \pi), \\ D: & (x = d, y = 0) \Rightarrow (x = \pi, y = 0) \Rightarrow (r = e^\pi, \varphi = 0). \end{aligned}$$

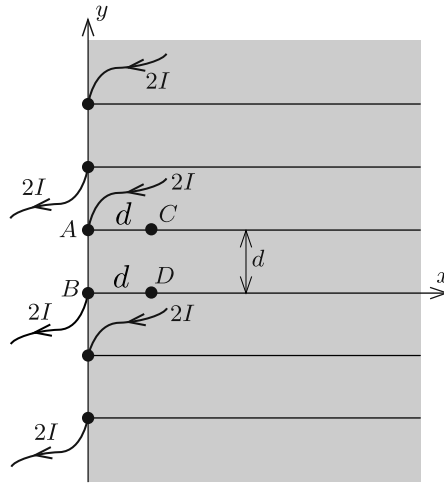
A leképezés utáni helyzetet a 13. ábra mutatja.

A  $C$  és  $D$  pontok közötti feszültséget a derékszögű hajlatnál látottak szerint számíthatjuk ki:

$$U_{CD} = \left| \frac{2\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{e^\pi - 1}{e^\pi + 1} - \frac{2\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} \right| = \frac{4\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} \approx 0,0865 \cdot \frac{4\rho I}{\pi \delta}.$$

A feladat megoldható tükrözéssel is. Ha a szalagot az  $x$  tengellyel párhuzamos oldalaira tükrözzük addig, ameddig az első és a negyedik síknegyedtel teljesen le nem fedjük, akkor eljutunk a félvégteles lemez problémájához (lásd

a 14. ábrát). Mivel az elektródákat is tükrözzük, ezért a megfelelő helyeken (végtelen sok különböző pontban)  $2I$  áram folyik be és  $2I$  folyik ki. Ezek alapján (6) felhasználásával megkaphatjuk, hogy a  $C$  és  $D$  pontok közötti feszültség nagysága



14. ábra

$$U_{CD} = \left| \frac{2\varrho I}{\pi\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(1 + (2n)^2)(1 + 4(n-1)^2)}{(1 + (2n-1)^2)^2} \right|.$$

A fenti összeg kiszámítása meglehetősen nehéz feladat. A WolframAlpha segítségével közelítőleg 0,173 adódik, amivel a feszültségre az előző (leképezéses) módszerrel kapott eredménnyel egyező kifejezést kapjuk.

### Egy Eötvös-verseny feladat

A 2016-os Eötvös-verseny 3. feladata egy síkbeli vezetési jelenséggel foglalkozik:

*Egy  $R$  sugarú,  $d$  vastagságú ( $\delta \ll R$ ), fajlagos ellenállású fémkorong  $A$  pontjába  $I$  erősségű áramot vezetünk,  $B$  pontjából pedig elvezetjük azt. Mekkora feszültség mérhető a 15. ábrán látható  $C$  és  $D$  pontok között?*<sup>3</sup>

A fémkorong határának egyenlete síkbeli polárkoordinátákkal kifejezve:  $r(\varphi) = 2R \cos \varphi$ . Alkalmazzunk a korongra egy általánosított legyező-transzformációt  $n = -1$  szögnyújtási faktorról, vagyis legyen

$$\varphi' = -\varphi, \quad r' = \frac{1}{r}.$$

A derékszögű koordináták közötti kapcsolat:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Ennek megfelelően a lemezt határoló körvonal képe a leképezés után:

$$x' = r' \cos \varphi' = \frac{1}{r(\varphi)} \cos \varphi \equiv \frac{1}{2R}, \quad y' = r' \sin \varphi' = -\frac{1}{r(\varphi)} \sin \varphi \equiv -\frac{1}{2R} \operatorname{tg} \varphi.$$

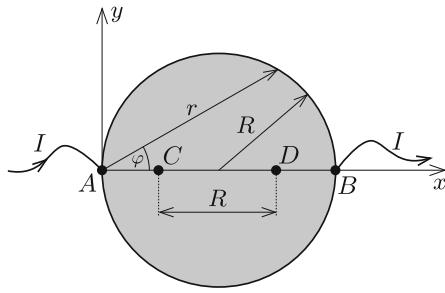
Látható, hogy a megadott leképezés a fémkorongot az  $x' \geq \frac{1}{2R}$  félvégtelen síklapba transzformálja (16. ábra), és a transzformációs összefüggésekből a kérdéses pontok koordinátáit is könnyen leolvashatjuk. A versenyfeladat megoldása tehát

$$U_{CD} = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{BC}{BD} = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{\frac{2}{3R} - \frac{1}{2R}}{\frac{2}{3R} - \frac{1}{2R}} = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln 9 = \frac{2\varrho I}{\pi\delta} \ln 3,$$

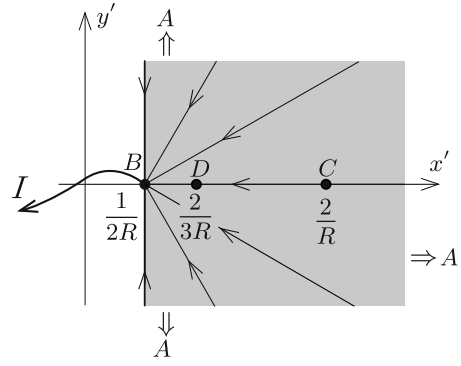
egyezésben a [2]-ben meghatározott eredménnyel.

### Egy gyakorlófeladat

<sup>3</sup>A feladat eredeti szövegét, jelöléseit kicsit megváltoztattuk, hogy a probléma a cikkben leírtakkal könnyebben összehasonlítható legyen.



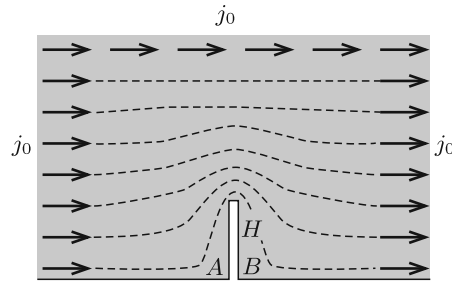
15. ábra



16. ábra

Befejezésül egy olyan feladatot ismertetünk (megoldás nélkül), amelyen ellenőrizhetik az Olvasók, hogy mennyire értették meg a leírtakat, és önállóan tudják-e alkalmazni a bemutatott leképezési módszereket.

Egy végtelen félsík a határvonalára merőlegesen  $H$  magasságú „bemetszést” tartalmaz. (A bemetszés szélessége és a lemez  $\delta$  vastagsága sokkal kisebb  $H$ -nál.) A bemetszéstől nagyon távol a vezető lemezben az egyenes határvonallal párhuzamosan  $j_0$  áramsűrűségű áram folyik (17. ábra). Mekkora a lemez anyagának fajlagos ellenállása, ha az  $A$  és  $B$  pontok között  $U_0$  feszültséget mérhetünk?



17. ábra

Útmutatás: Próbáljuk az elektromos áramlási képet legyező-leképezés(ek) és eltolás egymás utáni alkalmazásával olyan árameloszlásba transzformálni, amelynek  $\Phi(r)$  potenciálját jól ismerjük!

### Köszönetnyilvánítás és hivatkozások

Az egyik szerző (E. P.) szeretne köszönetet mondani tanárának, *Tófalusi Péternek*, valamint *Vigh Máténak* a cikk megírásában nyújtott segítségükért.

### Hivatkozások:

- [1] Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M.: *333+ furfangos feladat fizikából*, 315. feladat, Typotex (2017).
- [2] Tichy G., Vankó P., Vigh M.: *Beszámoló a 2016. évi Eötvös-versenyéről*, KöMaL (2017/2), 105–112.

**Elek Péter**  
 Debreceni Ref. Koll.  
 Dóczy Gimn. 12. évf.

**Szász Krisztián**  
 BME Fizikai Intézet,  
 Budapest