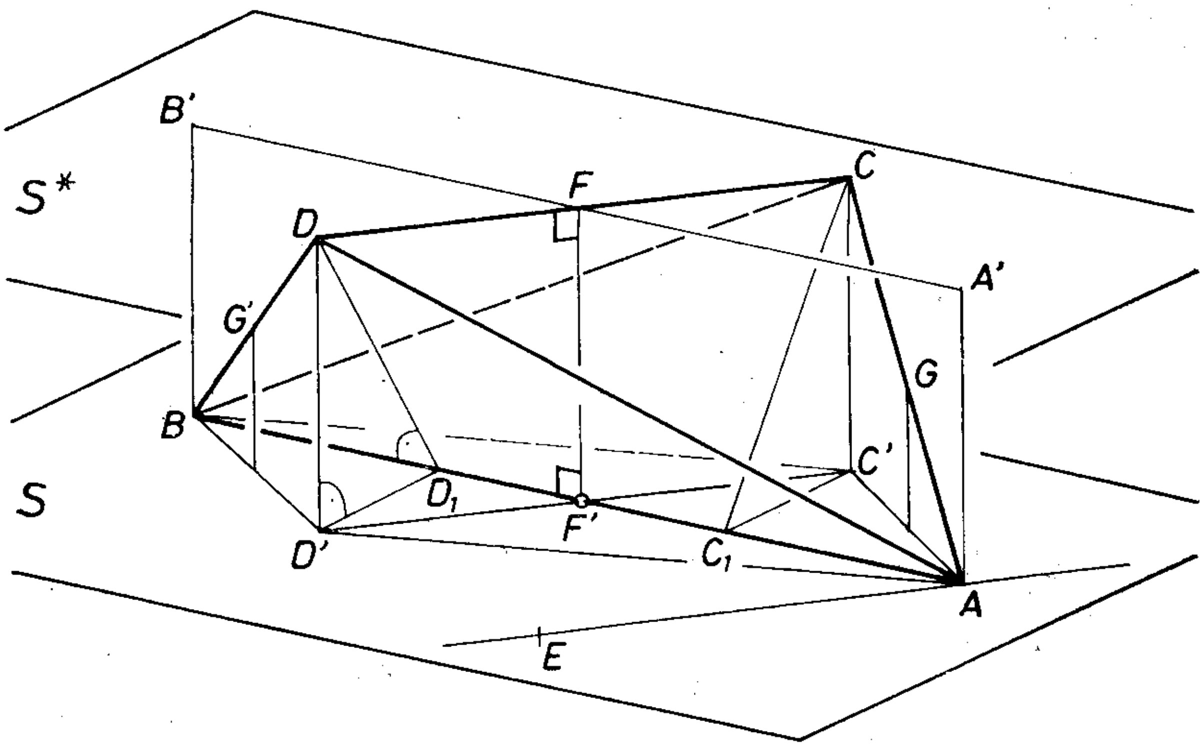
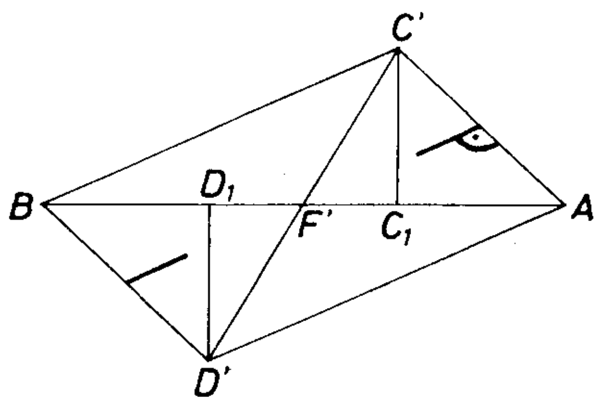
Megoldás. Legyen egy, a feltevés szerinti $ABCD$ tetraéder térfogata V. Ezt megadja a bármelyik lap területéből és az arra merőleges magasságból képezett szorzat $1/3$ része, tehát mivel esetünkben mind a négy magasság hossza m, azért a négy lap $3V/m$ területei is egyenlőek.



Ebből – az ABC és ABD háromszögekre gondolva – adódik, hogy CC_1 és DD_1 magasságaik egyenlők, más szóval C és D egyenlő távolságra vannak az AB egyenestől. Legyen E az A-n átmenő, CD-vel párhuzamos egyenesnek A-tól különböző pontja, továbbá C és D (merőleges) vetülete az $EAB = S$ síkon C', illetve D'. S egyértelműen meg van határozva, hiszen ha E az AB egyenesen volna akkor a 4 csúcs egy síkban volna. A CD egyenes párhuzamos S-sel, ezért $CC' \# DD'$, és C' a C_1-től különböző pont (különben ismét $CD \parallel AB$). A vetítés alapján CC' merőleges az S-beli $C'C_1$ egyenesre – ugyanígy $DD' \perp D'D_1$ –, ezért a CC_1C' és DD_1D' derékszögű háromszögek egybevágóságából $C'C_1 = D'D_1$. Másrészt e két szakasz AB-re is merőlegesen áll, mert e két háromszög síkja merőleges AB-re, hiszen pl. $CC_1 \perp AB$ és S révén $CC' \perp AB$.

Azt kaptuk tehát, hogy C' és D' egyenlő távolságra vannak AB-től. Nem lehetnek azonban (S-ben) AB-nek ugyanazon a partján – különben ismét $AB \parallel C'D' \parallel CD$-re jutnánk –, ezért az AB egyenes átmegy a $C'D'$ szakasz F' felezőpontján. Ez a pont nyilván a CD él F felezőpontjának a vetülete.



Cseréljük fel most eddigi meggondolásunkban az AB és CD élek szerepét. CD-ben is két egyenlő területű lapháromszög csatlakozik. Így S helyére a vele párhuzamos és CD-n átmenő S^* sík lép, és azt kapjuk, hogy F felezi $A'B'$-t, vagyis F' az AB-t, tehát az $AC'BD'$ négyszög paralelogramma; másrészt az AB, CD élek felezőpontjait összekötő egyenes – az élpár ún. éltengelye – merőleges mindkét élre.

Tekintsük most tetraéderünknek az AC, valamint a BD élt alkotó lappárjait, legyen AC felezőpontja G, BD-é G'. Ezeknek S-en levő vetülete felezi a paralelogramma AC', BD' oldalát, másrészt a GG' éltengely párhuzamos S-sel. Ezért a $G'GA$ derékszög valódi nagyságban látszik a vetületben, tehát paralelogrammánk téglalap, $AB = C'D' = CD$.

Ebből következik, hogy a tetraéder mindhárom szemben levő élpárja egyenlő hosszú, a 6 él között csak 3-féle hosszúság fordul elő, mind a 4 lapon a 3–3 oldal egyenlő. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Görög Imre (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a föltételezett tulajdonságból (a lapok egybevágósága útján) következik, hogy a lapok hegyesszögűek. Minden hegyesszögű háromszög 4 példányából összeállítható a tetraéder modellje, éspedig úgy, hogy a lapokra (kívülről) ránézve, ezek körüljárásai egyezőek. Ezért akármelyik csúcs bármelyik másiknak a helyére vihető úgy, hogy a többi 3 csúcs is egy–egy másik helyére jusson. Így az egyenlő éleknél levő lapszögek is egyenlők. Az egybevágó lapú tetraéderekben egy pontba esik a 3 éltengely felezőpontja, vagyis a súlypont, a beírt, valamint a körülírt gömb középpontja. (A síkban, háromszögben az utóbbi három nevezetes pont közül akármelyik kettőnek az egybeesése maga után vonja, hogy a háromszög szabályos.)