Egy tantétel a paraboláról[1].

Legyenek MT, MT' az M pontból a parabolához vont érintők, melynek gyújtópontja F. Ekkor:

$$FM^2 = FT \cdot FT'$$

E relácziót igazolhatjuk az analytikai geometria segélyével, ha koordináta tengelyekül választjuk a parabola szimmetriatengelyét és a csúcsponti érintőt. Az $M(x_0,\, y_0)$ pontból a parabolához húzott érintők érintési pontjainak koordinátái meghatározhatók a következő egyenletekből:

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Az érintési pontok abscissái tehát a következő egyenlet gyökei:

$$(p(x + x_0))^2 - 2py_0^2 x = 0$$

vagy

$$p^2x^2 + 2p(px_0 - y_0^2)x + p^2x_0^2 = 0$$

Ha ez egyenlet gyökei x és x', akkor

$$FT = x + \frac{p}{2}, \quad FT' = x' + \frac{p}{2},$$

és ennek folytán

$$FT \cdot FT' = xx' + \frac{p}{2}(x + x') + \frac{p^2}{4},$$

vagyis:

$$FT \cdot FT' = x_0^2 + \frac{p}{2} \cdot \frac{2(y_0^2 - px_0)}{p} + \frac{p^2}{4},$$

mely egyszerűsítve a következő alakot nyeri:

$$y_0^2 + \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2;$$

e kifejezés az FM négyzetét ábrázolja.

A tétel a planimetria segélyével is bebizonyítható.

Húzzuk az MH egyenest, mely párhuzamos a parabola tengelyével s a mely FT'-et H-ban metszi.

Ismeretes, miszerint az FM felezi a TFT' szöget és hogy az FMT és HMT' szögek egyenlők. De minthogy az érintő a T' pontban egyenlő szögeket alkot a tengellyel és az FT' vezérsugárral, a HMT' és $MT'H$ szögek egyenlők; ennélfogva az FMT és $FT'M$ háromszögek szögei rendre egyenlők s így ezen háromszögek hasonlók, miből következik, hogy.

$$\frac{FM}{FT} = \frac{FT'}{FM}$$

vagyis

$$FT \cdot FT' = \overline{FM}^2.$$

Ha tehát egy TFT' szög felező egyenesén választunk egy M pontot, melyre nézve FM az FT és FT' mértani középarányosa, akkor létezik egy parabola, melynek gyújtópontja F és mely érinti az MT egyenest T pontban, és az MT' egyenest T' pontban.

Ha az MF egyenesen egy M' pontot választunk, melyre nézve $MF = FM'$, egy második parabolát fogunk nyerni, melynek gyújtópontja szintén F, s mely az $M'T$ és $M'T'$ egyeneseket a T és T' pontokban érinti.

E két parabola különben megoldását képezi a következő feladatnak:

Meghatározandók azon parabolák, melyeknek gyújtópontja F és melyek a T és T' pontokon mennek keresztül.

E megjegyzésből könnyen levezethető a következő tétel, melyet Lemoine Emil, az *"Intermédiaire des Mathématiciens"* szerkesztője állított fel, s mely a következőképpen hangzik:

Ha egy ellipszis egy M pontjában, melynek gyújtópontjai F és F', meghúzzuk a normálist s ezen két pontot választunk N-et és N'-et, melyekre nézve

$$\overline{MN}^2 = \overline{MN'}^2 = MF \cdot MF'$$

akkor az ONF' szög$=MNF$ szög és az $ON'F' = MN'F$.

Megjegyzendő, hogy miután:

$$MN^2 = MF \cdot MF'$$

és az NN' normális az FMF' szög felező egyenese, a parabolának mely az FN és $F'N$ egyeneseket az F és F' pontokban érinti, gyújtópontja az M pont.

Minthogy továbbá $FM + F'M = 2a$, ez utóbbi parabola vezérvonalának távolsága az ellipszis középpontjától O-tól egyenlő a-val; e vezérvonal érinti tehát az O pontból mint középponttól, az ellipszis nagy-tengelye mint átmérő körül leírt kört.

Lemoine tantételének bizonyítása a következőkben adatik.

Nevezzük m és m'-nek az NF és NF' egyenesek *auguláris-coefficienseit*; (az $y = mx + n$ egyenletből) μ és μ'-nek az NM és NO egyenesekéit.

Hogy igazoljuk az MNF és $F'NO$ szögek egyenlőségét, elegendő kimutatni a következő egyenlőség helyességét:

$$\frac{m-\mu}{1+m\mu} = \frac{\mu'-m'}{1+m'\mu'},$$

de ezen egyenlőség egyenértékű a következővel:

$$\frac{m+m'}{1-mm'} = \frac{\mu+\mu'}{1-\mu\mu'},$$

mely azt fejezi ki, hogy az FNF' és MNO szögeknek közös felező egyenesük van. A normális egyenlete az $M(x_o, y_o)$ pontban:

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}$$

Ha feltételezzük, hogy x és y az N pont koordinátái és b' az OM félátmérőnek megfelelő konjugált félátmérő b', akkor:

$$\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} = \frac{b'^2}{a^2b^2}$$

Tudjuk továbbá, hogy $MF \cdot MF' = b'^2$, így tehát az N pont koordinátáit az

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \varepsilon ab \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

egyenletek szolgáltatják. E koordináták a következők:

$$x = \frac{x_0}{a}(a + b\varepsilon)$$

$$y = \frac{y_0}{b}(a + b\varepsilon)$$

Tegyük fel, hogy az $\varepsilon = +1$ az N, az $\varepsilon = -1$ az N' pontot szolgáltatja.

Közvetlenül igazolható, miszerint

$$x^2 + y^2 = (a + b\varepsilon)^2$$

tehát

$$ON = (a + b) \quad \text{és} \quad ON' = (a - b).$$

Ezek után:

$$\mu = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}, \quad \mu' = \frac{ay_0}{bx_0},$$

tehát

$$\frac{\mu+\mu'}{1-\mu\mu'} = \frac{ab(a+b)x_0y_0}{b^3x_0^2 - a^3y_0^2}$$

Másrészt:

$$\frac{m+m'}{1-mm'} = \frac{2ab(a+b)x_0y_0}{(a+b)(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) - a - b)a^2b^2}$$

s így tehát csak azt kell kimutatni, hogy

$$2(b^3x_0^2 - a^3x_0^2) = (a+b)(b^2x_0^2 - a^2x_0^2) - (a-b)a^2b^2$$

mi semminemű nehézségekkel sem jár.