

Hogy az

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p,$$

hatványösszeget képezhessük, néhány segédteletre van szükségünk, melyeket a következőkben levezetünk.

Jelentsé $f(x)$ az

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Mx + N$$

alakú egész függvényét az x -nek. Jelentsék továbbá

$$f_0, f_1, \dots, f_k \tag{1}$$

a függvény azon értékeit, melyeket ez felvesz, ha x helyébe az $x - 0, x_1, \dots, x_k$ értékeket helyettesítjük.

Legyen

$$f'_0 = f_1 - f_0, \quad f'_1 = f_2 - f_1, \quad \dots \quad f'_{n-1} = f_n - f_{n-1} \tag{2}$$

$$f''_0 = f'_1 - f'_0, \quad f''_1 = f'_2 - f'_1, \quad \dots \quad f''_{n-2} = f'_{n-1} - f'_{n-2} \tag{3}$$

s általánosságban

$$f_0^k = f_1^{k-1} - f_0^{k-1} \tag{4}$$

A 2)-ből következik, hogy

$$f_1 = f_0 + f'_0, \quad f_2 = f_1 + f'_1, \quad \dots, \quad f_n = f_{n-1} + f'_{n-1} \tag{5}$$

ha 3)-at is tekintetbe vesszük, lesz:

$$f_2 = f_0 + 2f'_0 + f''_0, \quad f_3 = f_1 + 2f'_1 + f''_1$$

s általánosságban

$$f_k = f_0 + \binom{k}{1} f'_0 + \binom{k}{2} f''_0 + \dots + f_0^k \tag{6}$$

Hogy a 6) helyes, azt úgy bizonyítjuk, hogy megmutatjuk, miszerint helyes marad, ha k helyébe $k+1$ -et írunk. Ugyanis

$$f_{k+1} = f_1 + \binom{k}{1} f'_1 + \binom{k}{2} f''_1 + \dots + f_1^k$$

$$f_{k+1} = (f_0 + f'_0) + \binom{k}{1} (f'_0 + f''_0) + \binom{k}{2} (f''_0 + f'''_0) + \dots + f_0^k + f_0^{k+1}$$

$$f_{k+1} = f_0 + \left[1 + \binom{k}{1} \right] f_0 + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] f''_0 + \dots + f_0^{k+1}$$

mely egyenlet a következő alakban írható.

$$f_{k+1} = f_0 + \binom{k+1}{1} f'_0 + \binom{k+1}{2} f''_0 + \dots + f_0^{k+1}$$

a közismeretes

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r} \tag{7}$$

összefüggésnél fogva.

Legyen

$$f(x) = x^p, \quad \text{és } x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad \dots, \quad x_n = n$$

akkor a 6)-nál fogva:

$$x^p = f_0 + \frac{x}{1} f'_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} f''_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_0 + \dots + \frac{x(x-1) \dots (x-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} f_0^p \tag{8}$$

s ha ezen egyenletbe fokozatosan $0, 1, 2, \dots, n$ -et helyettesítünk s a nyert eredményeket összeadjuk, a következő eredményt kapjuk:

$$S_p = f_0 \sum_1^n \frac{x}{1} + f_0'' \sum_1^n \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \dots + f_0^k \sum_1^n \frac{x(x-1) \dots (x-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} \tag{10}$$

