Gyakran előfordul, hogy több egyenlet több ismeretlennel lévén adva, ezek közül az egyik vagy másik az elsőnél magasabb fokú. Ilyenkor az ismeretleneknek egy hián való kiküszöbölése után fennmaradó egyenlet képezése még a legegyszerűbb esetekben is több vagy kevesebb nehézséggel jár, vagy ha az út, melyen haladnunk kell, világosan ki is van tűzve elénk, az eljárás nehézkes és nem áttekinthető. A következőkben néhány példán kívánom bemutatni a kiküszöbölési eljárást és a végegyenlet képezését.

Első eset.

Legyen adva a következő két legáltalánosabb alakú másodfokú egyenlet két ismeretlennel:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0 \tag{1)}$$

$$ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi = 0, \tag{2)}$$

kerestetik az y kiküszöbölése után fennmaradó egyenlet.

Írjuk az 1) és 2) alatti egyenleteket a következő alakban:

$$Py^2 + Qy + R = 0 \tag{3)}$$

$$P'y^2 + Q'y + R' = 0 \tag{4)}$$

hol

$$P = c, \quad Q = 2(bx + c), \quad R = ax^2 + 2dx + f \tag{5)}$$

$$P' = \gamma, \quad Q' = 2(\beta x + \varepsilon), \quad R' = \alpha x^2 + 2\delta x + \varphi \tag{6)}$$

Szorozzuk a 3) alatti egyenletet

$$M_1 = P'y + A'\text{-tel}$$

és a 4) alattit

$$M_2 = Py + A\text{-val.}$$

Lesz a 3)-ból

$$PP'y^3 + (P'Q + A'P)y^2 + (P'R + A'Q)y + A'R = 0 \tag{7)}$$

és a 4)-ből

$$PP'y^3 + (PQ' + AP')y^2 + (PR' + AQ')y + AR' = 0 \tag{8)}$$

Vonjuk le a 8)-at a 7)-ből és tulajdonítsunk az A és A' határozatlan mennyiségeknek oly értékeket, hogy az így nyert egyenlet az y bármely értékénél identikusan fennálljon, azaz az y-t ne is tartalmazza.

Ez akkor következik be, ha

$$PA' - P'A = PQ' - QP' \tag{9)}$$

$$QA' - Q'A = -(RP' - PR') \tag{10)}$$

s ekkor a megmaradó

$$RA' - R'A = 0 \tag{11)}$$

a végegyenlet.

A helyett, hogy a 9)-ből és 10)-ből az A és A' értékeit kiszámítanám és ezeket a 11)-be belehelyettesíteném, e három utóbbi egyenletet alkalmas szorzókkal megszorzom és azután összeadom, miáltal az A és A' belőlük eltűnik. Ily szorzók

$$QR' - RQ'$$

$$RP' - PR'$$

$$PQ' - QP'$$

A szorzás és a rákövetkező összeadás a végegyenletet a következő alakban szolgáltatja:

$$(PQ' - QP')(QR' - RQ') - (RP' - PR')^2 = 0 \tag{12)}$$

Második eset.

Legyen adva három legáltalánosabb alakú másodfokú egyenlet három ismeretlennel;

$$\begin{aligned} W_1 &= a_1y^2 + 2b_1yz + c_1z^2 + 2d_1y + 2c_1z + f_1 = 0 \\ W_2 &= a_2y^2 + 2b_2yz + c_2z^2 + 2d_2y + 2c_2z + f_2 = 0 \\ W_3 &= a_3y^2 + 2b_3yz + c_3z^2 + 2d_3y + 2c_3z + f_3 = 0 \end{aligned} \tag{1)}$$

melyekben a három első együttható állandó mennyiség, a két rákövetkező x-nek elsőfokú, az utolsó pedig x-nek másodfokú egész függvénye.

Hogy ezen egyenletekből y-t és z-t kiküszöbölhessük, megszorozzuk az egyenletek balodlalati az x, y és z három 6-odfokú függvényével T_1-, T_2- és T_3-mal és ezek együtthatóival azután úgy rendelkezünk, hogy a

$$W_1 T_1 + W_2 T_2 + W_3 T_3$$

összeg azon tagjainak együtthatói, melyek y-t és z-t tartalmazzák zérussal legyenek egyenlők.

Hogy az eredményt lehetőleg áttekinthető alakban nyerjük, az 1) alatti egyenletek helyébe három, velük egyenértékű egyenletet vezetünk be, melyeknek alakja azonban kevésbé általános.

Tegyük fel, hogy

$$H = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \qquad 2)$$

$$D_1 = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$$
$$E_1 = e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3$$
$$F_1 = f_1A_1 + f_2A_2 + f_3A_3$$
$$D_2 = d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3 \qquad 3)$$
$$E_2 = e_1B_1 + e_2B_2 + e_3B_3$$
$$F_2 = f_1B_1 + f_2B_2 + f_3B_3$$
$$D_3 = d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3$$
$$E_3 = e_1C_1 + e_2C_2 + e_3C_3$$
$$F_3 = f_1C_1 + f_2C_2 + f_3C_3$$

hol az A, B és C mennyiségek a

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns aldeterminánsai.

Ha az 1) alatti egyenletekből fokozatosan kiküszöböljük az y^2, yz és z^2 mennyiségeket, a következőket nyerjük:

$$Hy^2 + 2D_1y + 2E_1z + F_1 = 0$$
$$2Hyz + 2D_2y + 2E_2z + F_2 = 0 \qquad 4)$$
$$Hz^2 + 2D_3y + 2E_3z + F_3 = 0$$

melyek az 1) alattiakat helyettesíthetik; mindamellett a következő számítások megkönnyítése céljából még másik alakban fogjuk azokat felírni. Legyen ugyanis

$$5) \begin{cases} R_1 = HF_1 + 2(D_2E_1 - D_1E_2) + (E_2^2 - 4E_1E_3) \\ R_2 = HF_2 + 4(D_3E_1 - D_1E_3) - 2(D_2E_2 - 2D_3E_1 - 2D_1E_3) \\ R_3 = HF_3 + 2(D_3E_2 - D_2E_3) + (D_2^2 - 4D_1D_3) \end{cases}$$

s ha most a 4) alatti egyenleteket H-val szorozzuk, azok a következő alakra hozhatók:

$$6) \begin{cases} V_1 = (Hy + E_2)(Hy + 2D_1 - E_2) + 2E_1(Hz + 2E_3 - D_2) + R_1 = 0 \\ V_2 = 2(Hy + E_2)(Hz + D_2) - 8D_3E_1 + R_2 = 0 \\ V_3 = (Hz + D_2)(Hz + 2E_3 - D_2) + 2D_3(Hy + 2D_1 - E_2) + R_3 = 0 \end{cases}$$

A T_1, T_2, és T_3 függvények, melyek ama tulajdonsággal bírnak, hogy a

$$V_1T_1 + V_2T_2 + V_3T_3$$

szorzatot pusztán az x függvényévé teszik, a következők

$$T_1 = -4X(Hz + D_2)(Hz + 2E_3 - D_2) +$$
$$+8D_3(Y + E_2X) - 4(Z + D_2X)(Hz + D_2),$$
$$T_2 = 2X(Hy + 2D_1 - E_2)(Hz + 2E_3 - D_2)$$
$$+2(Y + E_2X)(Hz + 2E_3 - D_2) +$$
$$+2(Z + D_2X)(Hy + 2D_1 - E_2) + U. \qquad 8)$$
$$T_3 = 4X(Hz + D_2)(Hz + 2E_3 - D_2) -$$
$$-4(Y + E_2X)(Hy + E_2) + 8E_1(Z + D_2X). \qquad 9)$$

Ezekben X, Y, Z és U az x-nek határozatlan egész függvényei; még pedig az első, X, negyedfokú, a másik kettő, Y és Z, ötödfokú és az utolsó, U, hatodfokú.

Ha rövidség kedvéért

$$10)\begin{cases} HP = 4D_3R_1 + (2E_3 - D_2)R_2 - 2E_2R_3 \\ HQ = 4E_1R_3 + (2D_1 - E_2R_2 - 2D_2R_1) \\ H^2N = 4(D_2^2 - 4D_1D_3)R_1 + 4(D_2E_2 - 2D_1E_3 - 2D_3E_1)R_2 + \\ +4(E_2^2 - 4E_1E_3)R_3 + (R_2^2 - 4R_1R_3) \end{cases}$$

a $V_1T_1 + V_2T_2 + V_3T_3 = \Theta$ a következő alakot nyeri

$$11)\begin{cases} \Theta = (U + R_2XV_2 + \\ +2H(HPX + R_2Z - 2R_3Y)y + \\ +2H(HQX + R_2Y - 2R_1Z)z + \\ +H(2PY + 2QZ - HNX). \end{cases}$$

Hogy ezen kifejezés y-t és z-t ne tartalmazza, kell hogy X, Y, Z és U a következő egyenleteket elégítsék ki.

$$12)\begin{cases} U + R_2X = 0 \\ HPX + R_2Z - 2R_3Y = 0 \\ HQX + R_2Y - 2R_1Z = 0 \end{cases}$$

A Θ ekkor a következő alakot nyeri

$$\Theta = 2HPY + 2HQZ - H^2NX. \qquad 13)$$

A 12) alatti egyenletekből következik, hogy:

$$(2PR_1 + QR_2)HX = -(R_2^2 - 4R_1R_3)Y$$

$$(2QR_3 + PR_2)HX = -(R_2^2 - 4R_1R_3)Z;$$

vagyis, hogy az X osztható $R_2^2 - 4R_1R_3$-mal. De minthogy mindkettő, mint az 5) alatti egyenletekből kitűnik, negyedfokú egész függvény, a hányados csak állandó szám lehet, melyet tetszés szerint választhatunk. Válasszuk ezt a negatív előjellel vett H^4 reciprok értékének, akkor

$$\begin{aligned} H^4X &= -(R_2^2 - 4E_1R_3), \\ H^3Y &= 2PR_1 + QR_2, \\ H^3Z &= 2QR + PR_2); \end{aligned} \qquad 14)$$

ismeretesek lévén X, Y és Z, a 12) alatti egyenletek elseje szolgáltatja U-t is.

Végre a 14) alatti egyenletek segélyével a Θ a következő végleges alakot nyeri:

$$\Theta = \frac{1}{H^2}[N(R^2 - 4R_1R_3) + 4(P^2R_1 + PQR_2 + Q^2R_3)] \qquad 15)$$

mely zérussal egyenlítve, a végegyenletet szolgáltatja.