**I. megoldás.** Legyen a keresett $ABC$ háromszög átfogója $AB$, az $A$-ból induló (belső) szögfelezőnek a $BC$ befogóval való metszéspontja $D$. A beírt kör $O$ középpontját az $AD$ szakaszból az $ACD$ derékszög felezője metszi ki, és a $CO$ szakasz hossza $\varrho\sqrt{2}$, ahol $\varrho$ a beírt kör előírt sugara. – Ezek szerint feladatunkat lényegében megoldjuk, ha találunk eljárást az $ADC$ háromszög megszerkesztésére az $AD = f$ és e $\varrho\sqrt{2}$ hosszúságadatokból és a $C$-beli $90^\circ$-os szögből. Megjegyezzük, hogy $DAC\sphericalangle < 45^\circ$, ezért $DC < AC$.

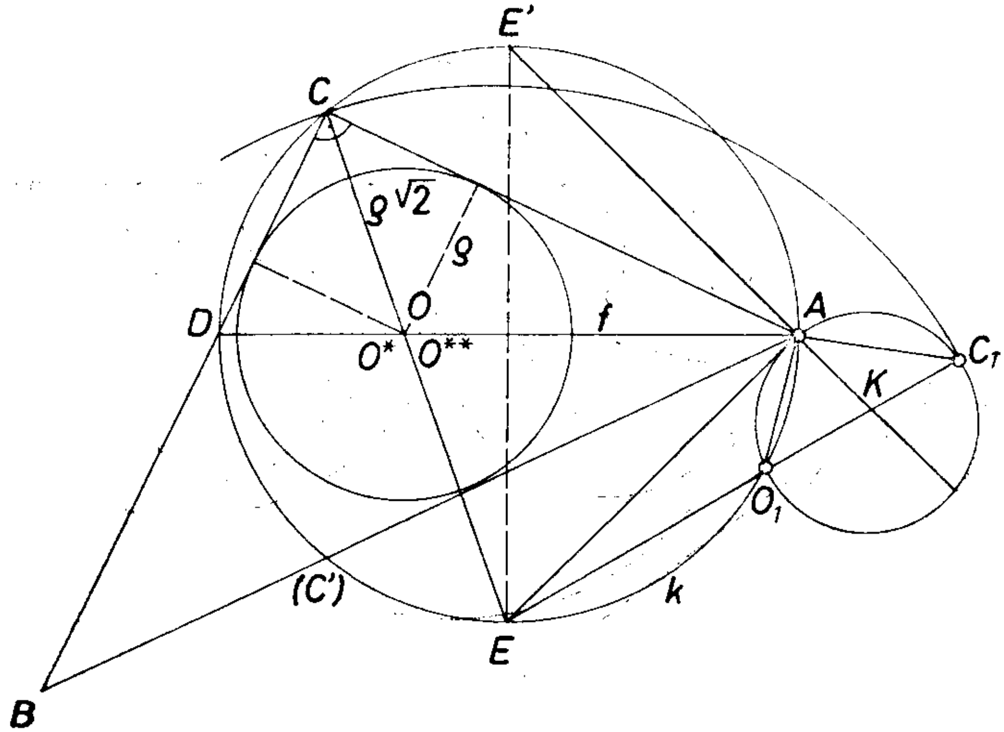
Az $AD$ szakasz fölötti $k$ Thalész–kört a $CO$ szakasz meghosszabbítása az $AD$-re merőleges átmérő $E$ végpontjában metszi, így lesz $DCE\sphericalangle = ECA\sphericalangle =$
$= 45^\circ$. Ekkor $AEO$ és $CEA$ hasonló háromszögek (2–2 szögük páronként egyenlő), ennélfogva

$$AE : EO = CE : EA, \tag{1}$$

amiből

$$EO \cdot EC = (EC - OC)EC = EC^2 - CO \cdot EC = EA^2 \left(= \frac{DA^2}{2}\right). \tag{1a}$$

Ezzel tulajdonképpen másodfokú egyismeretlenes egyenletet kaptunk $EC$-re, hiszen $EA$ a $k$ révén ismertté váló szakasz.




Szerkesszük meg az $EA$ egyenest $A$-ban érintő, $CO = \varrho\sqrt{2}$ átmérőjü segédkört, jelöljük a középpontját $K$-val, továbbá az $EK$ egyenesnek á segédkörrel való metszéspontjait $O_1$-gyel, $C_1$-gyel úgy, hogy $EC_1 > EO_1$. Ekkor az $EAO_1$ és $EC_1A$ háromszögek hasonlók, hiszen $E$-ben közös szögük van és $EAO_1\sphericalangle = EC_1A\sphericalangle$, ezért

$$EA : EO_1 = EC_1 : EA,$$

$$EO_1 \cdot EC_1 = (EC_1 - CO) \cdot EC_1 = EC_1^2 - CO \cdot EC_1 = EA^2, \tag{2}$$

tehát $EC_1$ eleget tesz $(1a)$-nak. Hozzátesszük, hogy $EC_1$ az egyetlen pozitív (vagyis számunkra használható) megoldás, mert $(1a)$-t 0-ra redukálva az ismeretlent nem tartalmazó tag negatív: $-EA^2$, míg $EC^2$ együtthatója $+1$. [És persze már az (1) felállításakor is pozitívnak gondoltuk a szereplő szakaszokat.]

Ezek alapján a szerkesztés, mindjárt teljesítve a feladat követelését is: az $E$ körüli $EC_1$ sugarú körrel kimetsszük $k$-ból $C$-t – úgy, hogy $CA > CD$ legyen –, vesszük $C$-nek $AD$-re való $C$ tükörképét, ekkor a $CD$, $AC$ egyenesek metszéspontja megadja a keresett háromszög hátra levő $B$ csúcsát.

A kapott $ABC$ háromszögben $C$-nél valóban derékszög van, benne $AD$ felezi a $CAB$ szöget, és beírt körének középpontja az $AD$ és $CE$ szögfelezők $O^*$ metszéspontja. Azt kell még belátnunk, hogy a $CO^*$ szakasz egyenlő az előírt $CO = C_1O_1$ szakasszal. Mérjük fel $CE$-re a $CO^{**} = CO$ szakaszt. Ekkor a $C$, $O^{**}$, $E$, $A$ pontalakzatban $CE = C_1E$ miatt teljesül (2) és (1a), tehát az (1)-nek megfelelő $AE : EO^{**} = CE : CA$ is, ezért $AEO^{**}$ és $CEA$ hasonló háromszögek, $O^{**}AE\sphericalangle = ACE\sphericalangle = 45^\circ = DAE\sphericalangle$, így $O^{**}$ a $DA$ egyenesen van; másrészt $O^{**}$ a $CE$-n van, tehát azonos $O^*$-gal. Ennélfogva $CO^* = CO = \varrho\sqrt{2}$, tehát $O^*$-nak a $CB$ és $CA$, továbbá az $AB$ oldalaktól való távolsága valóban $\varrho$.

A $C$ pont akkor és csak akkor jön létre a kör $DE'$ negyedívén mint belső pont, ha

$$ED < EC < EE' = DA,$$

amiből az első egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. A másodikhoz szükséges:

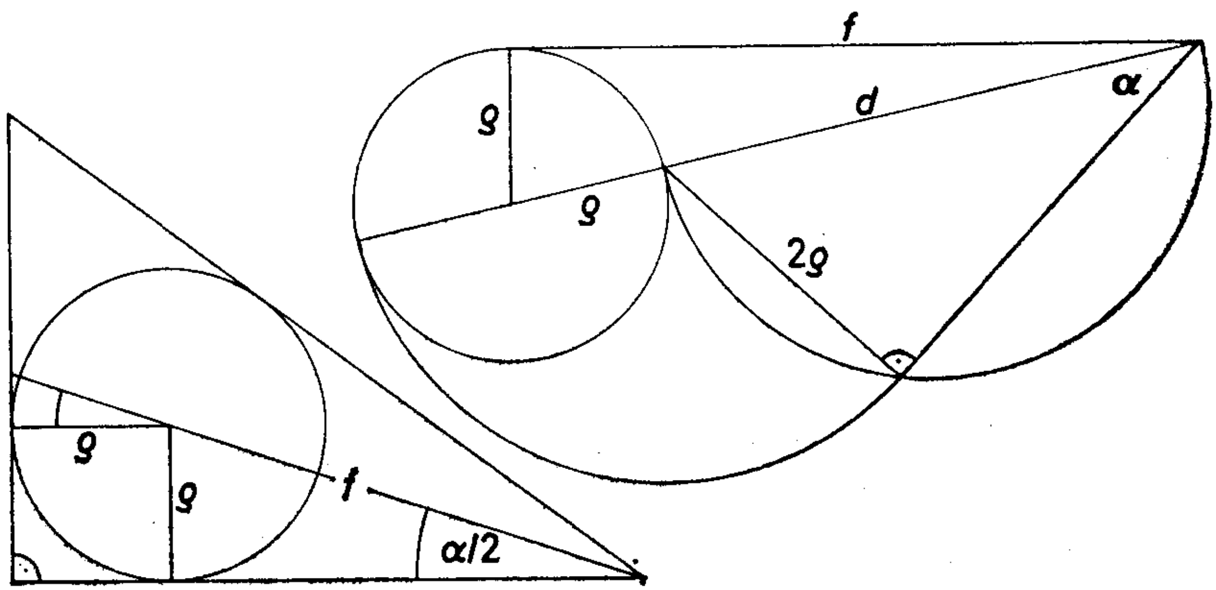
$$EK = EC - \frac{CO}{2} < DA - \frac{CO}{2},$$

amiből egyszerű számítással (minden pozitív)

$$\frac{f^2}{2} < f^2 - f \cdot CO, \quad CO = \varrho\sqrt{2} < \frac{f}{2}, \quad f > \sqrt{8}\,\varrho.$$

**II. megoldás.** Jelöljük (mint az I. megoldásban) az adott szakaszokat $\varrho$-val, $f$-fel, az $f$ által felezett hegyesszöget $\alpha$-val. A beírt kör középpontja a háromszög befogóival együtt egy $\varrho$ oldalú négyzetet határoz meg, amelyhez két, egymással hasonló derékszögű háromszög csatlakozik. Ezek átfogóinak az összege $f$, egyik hegyesszögük $\alpha/2$, emiatt

$$\frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{f}{\varrho}.$$




Jelöljük a jobb oldalon álló hányadost $\lambda$-val, és vegyük mindkét oldal négyzetét:

$$\frac{4(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha} = \lambda^2,$$

amiből teljes négyzetté kiegészítve kapjuk, hogy

$$\left(\frac{2}{\sin\alpha} + 1\right)^2 = \lambda^2 + 1. \tag{1}$$

Mivel esetünkben $0 < \sin\alpha < 1$, a feladatnak csak akkor van megoldása, ha a jobb oldal értéke nagyobb 9-nél, vagyis $f > \varrho\sqrt{8}$. Ha ez teljesül, a kapott (1) összefüggés $\alpha$ értékét egyértelműen meghatározza. A szerkesztés kedvéért írjuk vissza $\lambda$ értékét, kapjuk, hogy

$$(d+\varrho)^2 = f^2 + \varrho^2, \tag{2}$$

ahol $d$ annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek az $\alpha$-val szemközti befogója $2\varrho$. Tehát az $f$, $\varrho$ befogójú derékszögű háromszög átfogójából elveszünk egy $\varrho$-nyi darabot, majd a maradék fölé Thalész–kört rajzolunk, és ezt a szakasz egyik végpontja körüli, $2\varrho$ sugarú körrel elmetszve megkapjuk az $\alpha$ szöget. Ebből és $\varrho$-ból a keresett háromszög már könnyen megrajzolható. Mivel a kapott (2) összefüggés ebben is érvényes, benne az $\alpha$ szög felezője egyenlő az adott $f$ szakasszal, hiszen (2) ennek az értékét is egyértelműen meghatározza.