I. rész

1. Egy szabályos n-szög alapú egyenes hasáb lapátlóinak száma, testátlóinak száma és a 24 valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Határozzuk meg n lehetséges értékeit. (*11 pont*)

2. Tekintsük a következő állításokat.
A: Két irracionális szám összege mindig irracionális.
B: Van olyan számsorozat, amely korlátos, nem monoton és nem konvergens.
C: Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan tartalmaz kört.
a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)
b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

3. Egy négyszög két szomszédos oldalának hossza 3, illetve 4 cm, közbezárt szögük 60°. A négyszög húr- és érintőnégyszög is egyben.
a) Mekkora a négyszög másik két oldala? (*7 pont*)
b) Számítsuk ki a négyszög beírt és köré írt körének sugarát. (*7 pont*)
(Válaszainkat cm-ben, két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)

4. *a*) Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ függvény páratlan és korlátos függvény. (*7 pont*)
b) Egy gömb alakú higanycsepp n egyforma, kisebb cseppre esett szét. Ezáltal a kis cseppek összfelszíne éppen négyszerese lett az eredeti higanycsepp felszínének. Határozzuk meg n értékét. (*7 pont*)

II. rész

5. *a*) Cinkelt érmét szeretnénk készíteni. A „Trükkös hatos” nevű játékban akkor nyerünk, ha az érme hatszori feldobásakor pontosan négyszer lesz fej és kétszer írás. Milyen módon cinkeljük az érmét (vagyis mekkora legyen a fej dobásának a valószínűsége), ha a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk nyerni? (*8 pont*)
b) Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám adható meg úgy, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?

Adjunk példát a maximális elemszámra és mutassuk meg, hogy több prímszámot nem tudunk megadni a kívánt módon. (*8 pont*)

6. *a*) Egy családban három gyerek van: Anna, Béla és Csaba. Minden nap kisorsolják, hogy ki vigye le sétáltatni kutyájukat, Buksit (egy kalapba teszik egy-egy cédulára írva a nevüket, majd húznak egy cédulát).

Hány olyan sorsolás van, amelynél egy hetes időszakot véve, minden gyerek sorra kerül a kutyasétáltatás során? (*9 pont*)
b) Igazoljuk (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy ha $n\geq 9$ pozitív egész szám, akkor $2^n>32n$. (*7 pont*)

7. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet: (*8 pont*)

$$\operatorname{tg} x\cdot\sin 4x=\frac{1}{2}.$$

b) Adjuk meg azokat a t pozitív egész számokat, amelyekre a fenti egyenletnek a $[2018;t]$ intervallumon pontosan 2018 darab valós megoldása van.

Számításaink során a π minél pontosabb értékével számoljunk. (*8 pont*)

8. Húzzunk érintőket az $y=x^2$ parabola $A(-1;1)$ és $B(2;4)$ pontjaiba.
a) Írjuk fel az érintők egyenletét. (*3 pont*)
b) Mutassuk meg, hogy az érintők a $C\big(\frac{1}{2};-2\big)$ pontban metszik egymást. (*2 pont*)
A parabola két részre osztja az ABC háromszöget, egy konvexre és egy konkávra.
c) Számítsuk ki az ABC háromszög területét. (*5 pont*)
d) Határozzuk meg a konvex és a konkáv alakzat területét. (*6 pont*)

9. A Bástya SE sakkcsapata nemrég indult először a nemzeti csapatbajnokságban. Egy találkozón 2 csapat küzd meg egymással, mindkét csapat 12 játékossal játszik. Ennek a 12 játékosnak van egy előre rögzített erősségi sorrendje és az egyik csapat legerősebbje játszik a másik csapat legerősebbjével, a második legerősebbek is egymással, stb. Így egy találkozón 12 partira kerül sor. Egy partinak 3 kimenetele lehet: győzelem esetén 1, vereség esetén 0, míg döntetlen esetén fél pontot kap a játékos. Tegyük fel, hogy egy-egy parti kimenetele nem függ a játékosok sakktudásától, mindegyik kimenetel egyformán valószínű. A csapat által elért pontszámot úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az egyes csapaton belüli játékosok által elért pontokat.

a) Mutassuk meg, hogy csak úgy lehet döntetlen (azaz amikor 6 pontot ér el mindkét csapat) egy találkozó, ha egy csapaton belül ugyanannyiszor nyernek és veszítenek. (*2 pont*)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy – a fenti feltételek mellett – a Bástya SE döntetlent ér el első mérkőzésén? (*7 pont*)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első három találkozójuk döntetlen lesz és a negyedik meccset megnyerik? Az egyes találkozókon elért eredményeket egymástól függetleneknek tekinthetjük.
Válaszainkat négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*2 pont*)

A csapat legjobb pontszerzője 9 partit játszott az idény folyamán. Az általa szerzett pontok átlaga $\frac{2}{3}$, míg a szórásnégyzete $\frac{1}{6}$.

d) Határozzuk meg, hogy a játékos hány partiban nyert, vesztett illetve ért el döntetlent. (*5 pont*)