„Kínai étterem”
– a véletlen permutációkról 2.

2.2 A „kínai étterem folyamat” (Chinese restaurant process)

Most már rátérhetünk a címben szereplő témánkra.

Hogyan értjük, hogy a tanulók véletlen sorrendben érkeznek? Vagy általánosabban: *hogyan modellezhetjük a „véletlen permutációkat”?*

Nyilván sokféleképpen képzelhetjük el az előbbit, de talán még szemléletesebb, ha a „karácsonyi ajándékozásra” gondolunk. Itt minden tanuló nevét bedobják egy kalapba, jól összekeverik, majd a tanulók egyesével kihúznak egy-egy nevet. Ha itt a sorsolás véget is érne, akkor ez egy jó modell lenne a véletlen permutációra. Azonban a karácsonyi ajándékozásnál vigyázni kell arra is, hogy senki ne húzza önmagát. Ennyiben tehát nekünk nem jó szemléltetés, maradunk az eredetinél, amikor meg van engedve, hogy egyesek önmagukat húzzák.

Ez a modell jó, előállít egy véletlen permutációt – de van vele egy probléma. Ha pl. kiderül, hogy valakit még meg akarnak hívni az osztálykarácsonyra, akkor az egész sorsolást elölről kell kezdeni. A modell nem „dinamikus”. És persze a ciklusok sem fognak közvetlenül látszani. A ciklus-szerkezet és az újrakódolás alapján azonban (lásd a 4. feladat megoldását) lehet dinamikus modellt is csinálni – ez lesz az úgynevezett *„Kínai étterem folyamat”* (*Chinese restaurant process*).

A továbbiakhoz érdemes megjegyezni, hogy vélhetően honnan a folyamat neve. Talán onnan, hogy úgy képzeljük: a kínai vendéglőben egy-egy asztal körül praktikusan végtelen sokan ülhetnek, és bármely két vendég széke közé le lehet tenni még egy széket.

Tekintsük egy n elemű permutáció újrakódolt alakját. Gondoljuk embereknek a permutáció elemeit, a számuk azt jelzi, hányadikként érkeztek a vendéglőbe. Az első – az 1-gyel véget érő – ciklus tagjait ültessük az első asztalhoz abban a sorrendben, ahogy a ciklusban jönnek. A második – az első asztalhoz le nem ültetettek közül a legkisebb sorszámúval véget érő – ciklus tagjait ültessük a második asztalhoz, szintén a ciklus sorrendjében, és így tovább. Tegyük fel, hogy van már egy eljárásunk, amely minden újrakódolt permutációt ugyanolyan $\left(\frac{1}{n!}\right)$ valószínűséggel állít elő. Megérkezik az új vendég, fogja a székét és le akar ülni valamelyik asztalhoz, vagy új asztalt is kezdhet. Olyan – természetesen a véletlenen alapuló – utasítást akarunk neki adni, amellyel elérhető, hogy minden $n+1$ elemű permutáció újrakódolt alakja is egyenlő valószínűséggel „valósuljon meg”. Hogy mit akarunk, azt pontosabban a következő – a középponti kérdésről lévén szó ez alkalommal szám nélküli – feladatban fogalmazzuk meg.

Feladat. *Tegyük fel, hogy az újonnan érkező vendégnek van egy véletlen szám előállítója. (Mondjuk egyenletes eloszlással forgat körbe egy $n+1$ csúcsú szabályos sokszöget.) Milyen valószínűséggel üljön az egyes asztalokhoz a székével, hogy most minden $n+1$ elemű újrakódolt permutáció ugyanolyan valószínűséggel álljon elő, ha azt látja, hogy az i-edik asztalnál a_i számú ember ül?*

Megoldás. Tippelhetnénk arra, hogy valahogy úgy kell a valószínűségeket választani, hogy az egyes asztalnál ülők száma ne nagyon térjen el egymástól. De ez nem jó tipp. Azt kell ugyanis elérnünk, hogy kijelölve mondjuk a „balra tarts” irányt, az új vendég bármely asztalnál ülőtől balra egyforma valószínűséggel üljön le és ugyanilyen valószínűséggel kezdjen új asztalt. Ez összesen $n+1$ helyet jelent, tehát mindegyik helyre $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kell leülnie. Tehát az i-edik asztalhoz $\frac{a_i}{n+1}$ valószínűséggel ül le, új asztalt $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kezd. (Vagyis úgy vesszük, hogy az első üres asztalnál egy hely van).

Ez a választás jó, ugyanis azt jelenti, hogy az n elemű véletlen permutáció újrakódolt alakjának bármely két eleme közé, illetve az elejére vagy a végére ugyanolyan valószínűséggel tesszük az $n+1$ számot. Tehát ha az n elemű véletlen permutációk egyforma valószínűséggel álltak elő, akkor valóban egyenlő valószínűséggel áll elő minden $n+1$ elemű permutáció is.

Ez lesz tehát a

„Kínai étterem folyamat” (KÉF). *Az első vendég leül az első asztalhoz. A második vendég $1/2$–$1/2$ valószínűséggel ül az első vendég mellé, vagy kezd új asztalt. Ezután az n-edik új vendég $\frac{a_i}{n}$ valószínűséggel ül az i-edik asztalhoz, ha ott érkezésekor a_i számú ember ül, illetve $\frac{1}{n}$ valószínűséggel kezd új asztalt. (Az i-edik asztalnál a_i helyre ülhet, az üres asztalnál egy hely van.)*

Beláttuk, hogy ez a modell minden azonos elemszámú permutációt ugyanolyan valószínűséggel állít elő. A leírt folyamat eredménye a véletlen permutációk egy dinamikus modellje. Dinamikus, mert az új ember érkezésekor nem kell mindent elölről kezdenünk, mint a karácsonyi sorsolásnál.

A KÉF erejét szemlélteti az, amilyen egyszerűvé válik segítségével a 3. feladat meg-oldása (de lásd a következő feladatok megoldását is):

7. feladat*.[1]

Adjunk választ a KÉF segítségével arra a kérdésre, hogy milyen valószínűséggel lesz n elem egy véletlen permutációjában két előre kijelölt elem azonos ciklusban? (A 3. feladat „nyelvén” megfogalmazva: Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik (előre kijelölt) másik helyen, például az első helyen ülő tanulónak is fel kell állnia?)

2.3. További kérdések a véletlen permutációk ciklus-szerkezetéről

Folytathatjuk is a kérdezést. Megkérdezhetjük például a következőket:

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második helyen ülő tanulónak is fel kell állnia? És mi a valószínűsége annak, hogy mindkettő megússza, hogy fel kelljen állnia?

A következő két feladat általánosságban veti fel ezeket a kérdéseket. Az elsőre adott megoldások mindegyike egészen más szemlélet alapján közelíti meg a feladatot. Így összehasonlíthatjuk a kombinatorikus-számolós, a csoportelméleti-kódolós és a valószínűségi szemléletmódot.

8. feladat. *Mi a valószínűsége annak, hogy a 3. feladatban nemcsak az n-edik helyen ülőnek, hanem még $s-1$ (előre kijelölt) másik helyen ülő ember mindegyikének fel kell állnia? (Értelemszerűen az n helyen ülőt már nem választhatjuk ki.) Kissé átfogalmazva a kérdést: Mi a valószínűsége annak, hogy összesen s előre kijelölt helyről fel kell állnia az ott ülőnek? És a permutációk nyelvén megfogalmazva: Mi a valószínűsége annak, hogy n elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt elem egy ciklusban lesz?*

1. megoldás *számolással.* A kérdés megválaszolására alkalmazható a 3. feladat első megoldásának a gondolatmenete.

A számolás áttekinthetősége érdekében a számolást az $s = 4$ esetben hajtjuk végre. Megint jelölje k azt, hogy hány ember áll fel összesen. Ezek közül $k-4$ választható szabadon az $n-4$ további ember közül, ezt $\binom{n-4}{k-4}$-féleképp tehetjük meg. A k ember ismét $(k-1)!$-féleképpen alkothatja a ciklust, a maradó $n-k$ ember pedig bármilyen sorrendben ülhet a maradó $n-k$ helyen, ez egy $(n-k)!$-os szorzó. Összességében ez $(n-4)!(k-1)(k-2)(k-3) = 6(n-4)!\binom{k-1}{3}$ lehetőséget jelent, és ezt kell minden $k = 4, 5, \ldots, n$-re összeadni. Felhasználjuk, hogy

$$\sum_{4}^{n} \binom{k-1}{3} = \binom{n}{4},$$

így az összeg $6(n-4)!\binom{n}{4} = \frac{n!}{4}$. Tehát a keresett valószínűség $1/4$. Az általános esetben a

$$\sum_{s}^{n} \binom{k-1}{s-1} = \binom{n}{s}$$

összefüggést kell használni, és a keresett valószínűség $1/s$.

Megjegyzés. A 3. feladat második megoldása közvetlenül nem általánosítható. A harmadik megoldásból viszont, amely az „újrakódolást” használja, gyorsan kiolvasható a válasz.

2. megoldás *az „újrakódolás” segítségével.* Először tisztázzuk a következőt. Nyilván elég azt vizsgálnunk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az utolsónak érkező tanulóval együtt másik $s-1$, előre kijelölt helyen ülőnek is fel kell állnia. Az is nyilvánvaló, hogy nem változtat a valószínűségen, ha ehelyett azt vizsgáljuk, hogy nem az utolsó, hanem az *elsőnek érkező* – tehát az első helyen ülő – tanuló kezdi a felállást és másik, előre kijelölt helyen ülő $s-1$ tanulónak kell még felállnia. És ez könnyen lefordítható az újrakódolás segítségével. A megfelelő permutáció újrakódolt alakjánál ugyanis ez azt jelenti, hogy a kijelölt $s-1$ helynek a sorszámai mind előbb jönnek az 1-nél. Vagyis a kérdés a permutációk nyelvén a következőre egyszerűsödik: *Mi a valószínűsége, hogy az első n szám egy véletlen permutációjának az újrakódolásánál előre kijelölt $s-1$ szám előbb jön az 1-esnél?*

Most is csoportosítjuk az újrakódolt permutációkat. Két permutáció akkor kerül azonos csoportba, ha az 1-es és a másik $s-1$ kijelölt szám összességében ugyanazt az s helyet foglalja el, másrészt a többi szám a két permutációban ugyanúgy helyezkedik el. Így minden egyes csoportba $s!$ permutáció kerül, hiszen az s kitüntetett számot ennyiféleképpen lehet permutálni. És ezek közül nyilván $(s-1)!$ olyan van, ahol az 1 van az utolsó helyen, vagyis az $s-1$ kijelölt szám után. A válasz tehát $1/s$. És az eredeti kérdésre visszatérve megint azt kaptuk, hogy a permutációk $1/s$-ed részében fog mind az s kijelölt helyen ülő tanulóra sor kerülni.

A permutációkra vonatkozóan a következőt kaptuk:

---

[1] A *-gal jelölt feladatok megoldása a függelékben található.

Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy n elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt s elem egy ciklusban van,* $1/s$.

Megjegyzés a fenti 2. megoldáshoz. Ez a megoldás nyilván elegánsabb az előző megoldásnál. Viszont ugyanaz a fogalmi nehézség van benne, amire az újrakódolásnál már utaltunk. Elvileg hasonló fogalmi nehézség van a következő megoldásnál is, de a KÉF szemléletessége miatt ez könnyebben „fogható”. Ráadásul a megoldás a 7. feladat megoldásának az általánosítása.

3. megoldás *a „kínai étterem folyamat” segítségével.* A kimondott tételre adunk egy új bizonyítást. Tudjuk, hogy a „kínai étterem folyamat” során az n vendég minden permutációja ugyanolyan valószínűséggel áll elő. Ez viszont azt is jelenti, hogy nyugodtan feltehetjük, hogy az előre kijelölt s elem az első s szám, vagyis a KÉF nyelvén: az első s vendég. A kérdés tehát erre egyszerűsödik: Mi a valószínűsége, hogy a „kínai étterem folyamat” során az első s vendég ugyanannál az asztalnál fog ülni?

Minthogy az első vendég benne van, az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel fog az utána érkező $s-1$ vendég mindegyike az ő asztalához ülni. A második vendég nyilván $1/2$ valószínűséggel ül az ő asztalához. Most már ketten ülnek ennél az asztalnál, így a harmadik vendég már $2/3$ valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni. Ugyanígy az i-edik vendég érkezésekor már $i-1$ ember ül ennél az asztalnál, tehát ő $(i-1)/i$ valószínűséggel fog oda leülni. A keresett valószínűséget úgy kapjuk, hogy ezeket az értékeket összeszorozzuk $i=2,3,\ldots,s$-re. A szorzat, s így a keresett valószínűség $1/s$.

9. feladat. *Mi a valószínűsége annak, hogy a 3. feladatban $s-1$ előre kijelölt helyen ülő tanuló egyikének sem kell felállnia az utolsóval együtt? Vagy átfogalmazva: mi a valószínűsége annak, hogy elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt $s-1$ elem egyike sincs egy előre kijelölt s-edikkel egy ciklusban?*

Megoldás. Ez a valószínűség ugyanúgy kiszámolható, mint a 8. feladatban kérdezett valószínűség is kiszámolható volt.

Az ott közölt második megoldás gondolata is alkalmazható ebben az esetben. Megint feltehető, hogy az az elem, amivel a többi nem lehet egy ciklusban, épp az 1-es. A permutációkat ugyanúgy csoportosítjuk, mint ott, és most az a kikötés, hogy a többi $s-1$ elem mindegyike az 1-es után jöjjön az újrakódolásnál. Megint minden csoportban $s!$ permutáció van és közülük megint $(s-1)!$ teljesíti a kikötést. A keresett valószínűség most is $1/s$.

Végül ugyanúgy, mint ott, most is alkalmazható a KÉF is. Most az a kérdés, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az első után érkező $s-1$ vendég egyike sem ül az első asztalhoz. A második vendég $1/2$ valószínűséggel ül más asztalhoz, a harmadik vendég vagy a másodikkal ül egy asztalhoz, vagy új asztalt kezd, ennek $2/3$ a valószínűsége, és általában az i-edik vendég a számára lehetséges $i$hely közül bárhova ülhet, kivéve az első asztalához, ez egy helyet zár ki. Tehát $(i-1)/i$ annak a valószínűsége, hogy ő a kikötésünknek megfelelő helyre ül. Megint ezeket az értékeket kell összeszorozni és az eredmény ismét $1/s$.

Tételként megfogalmazva a nyert eredményt:

Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy n elem egy véletlen permutációjában $s-1$ előre kijelölt elem egyike sem lesz egy s-edik előre kijelölttel egy ciklusban,* $1/s$.

10. feladat*. *Mi a valószínűsége annak, hogy elemek egy véletlen permutációjában előre kijelölt elem mindegyike különböző ciklusban lesz?*

Ismét alkalmazható mindhárom megoldás (lásd a függelékben), és a válasz a következő:

Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy n elem egy véletlen permutációjában s előre kijelölt elem mindegyike más ciklusban lesz,* $1/s!$.

2.4. Várható ciklushossz és ciklusszám

A „kínai étterem folyamat” bevezetésénél már láttuk, rossz várakozás az, hogy a ciklusok hossza egyenletesen fog eloszlani. A KÉF modell ennek az ellenkezőjét mutatja: a „tipikus” esetben a ciklusok nagysága egyáltalán nem lesz egyenletes. (Ez kiderül például a 9. feladatnál is.) Ha egy asztalnál a vendégek száma egyszer nagyobb a többinél, akkor onnantól kezdve nagyobb valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni a következő vendég, ami után megint még nagyobb valószínűséggel fog ideülni a következő stb. Ez persze még csak heurisztikus érv. De a következő fel-adatban ezt egy módon pontosan is megfogalmazzuk.

11. feladat. *Várhatóan hány ember fog részt venni a 3. feladat „forgásában”, ha az osztályban n tanuló van? Vagy ugyanez az „éttermes” megfogalmazásban: Az n-edik vendég érkezése után várhatóan hány ember fog ülni az első vendég asztalánál?*

1. megoldás. Felhasználjuk, hogy a várható értékek akkor is összeadódnak, ha a változók nem függetlenek. Legyen $X_i$az a valószínűségi változó, amelynek értéke 1, ha az i-edik vendég az első asztalhoz ült, és 0, ha nem. (Vagyis X_i az „i-edik vendég az első asztalnál ül” esemény karakterisztikus változója vagy indikátora.) Az első asztalnál ekkor $X_1+X_2+\ldots+X_n$ vendég fog ülni. Ennek a változónak a várható értékét keressük. Ez tehát megegyezik az egyes változók várható értékének az összegével. Az első változó mindig 1 (az első vendég az első asztalnál ül), a többi változó várható értéke $1/2$, hiszen ennyi a valószínűsége annak, hogy az i-edik vendég az első asztalnál ül. A keresett várható érték tehát $(n+1)/2$.

2. megoldás. A 8. feladat megoldása során megfogalmazott állítás alapján egy másik, gyorsabb bizonyítást is adhatunk ugyanerre. Ott láttuk, hogy minden 1 és n közötti k-ra ugyanannyi, $1/n$ a valószínűsége annak, hogy az első asztalnál k vendég ül. Így a várható érték $\sum_1^n \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$.

Tétel. *Az első n szám egy véletlen permutációjában az 1-et tartalmazó ciklus várható elemszáma $(n+1)/2$.*

12. feladat*. *Állításunk tehát azt mondja, hogy az első asztalnál ülők számának várható-értéke a vendégek számának felénél $1/2$-del több. Másrészt azt mondja, hogy bármely vendégre igaz, hogy ennyi az ő asztalánál ülő vendégek számának várható értéke. De lehetetlen, hogy két – vagy pláne több – asztalnál üljenek ennyien. Ha A az első vendég asztalánál ülők száma, B a második vendég asztalánál ülők száma, akkor e két valószínűségi változó mindegyikének $(n+1)/2$ a várható értéke, így összegük várható értéke $n+1$, több, mint a vendégek száma. Hogyan oldható fel ez az ellentmondás?*

13. feladat*. *Következik-e az előbb megfogalmazott tételből, hogy a legnagyobb ciklus várható elemszáma (a legfoglaltabb asztalnál ülő vendégek száma) is $(n+1)/2$?*

Egy véletlen permutáció legnagyobb ciklusának várható értékét pontosan meghatározni nehezebb feladat. Ez Golomb-nak sikerült, aki 1964-ben bizonyította, hogy ha M_n jelöli az n elemű véletlen permutáció legnagyobb ciklusának várható értékét, akkor M_n/n egy állandóhoz tart, amelynek értéke $0{,}624\,329\,9\ldots$, az úgynevezett Golomb–Dickman-féle konstans.

Nemcsak a legnagyobb ciklus várható hossza érdekes kérdés, hanem az is, hogy várhatóan hány ciklus van n elem egy véletlen permutációjában. Ez számolással aránylag nehezen jön ki, a KÉF segítségével egyszerű.

Jelöljük ugyanis $E(n)$-nel ezt a várható értéket. $E(1) = 1$, $E(2) = 3/2$ nyilvánvaló. Általában ha $E(n-1)$-et már ismerjük, akkor a KÉF szerint az érkező n-edik vendég $1/n$ valószínűséggel kezd új asztalt, azaz növeli a ciklusok számát. Tehát $E(n) = E(n-1) + 1/n$. Ebből következik, hogy

Tétel. *Egy n elemű véletlen permutációban a ciklusszám várható értéke* $\sum_1^n \frac{1}{n}$.

A KÉF alkalmazása az alábbi feladattal lesz „kerek”:

14. feladat*. *Bizonyítsuk be a KÉF segítségével is a 6. feladat állítását, amely szerint annak a valószínűsége, hogy egy adott elem egy n elemű véletlen permutációban pontosan k elemű ciklusban van, k-tól függetlenül mindig $1/n$.*

Befejezés

Egyrészt szeretném még egyszer hangsúlyozni, hogy *Gyenes Zoltánnal együtt* gondoltuk át az itt leírtak legnagyobb részét. Remélhetőleg sikerült valamennyire érzékeltetni, hogy a „kínai étterem folyamat” segítségével milyen jól szemléltethetők és kezelhetők a véletlen permutációk egyszerű tulajdonságai. Elegánsan szemlélteti pl. a ciklusszám várható értékét, de különösen frappánsnak tűnik ebből a szempontból a 7. feladat megoldása, valamint az utána következő három feladat hasonló megoldása. És érdemes megfontolni a következőt is. Ha a „kínai étterem folyamatot” minden előzmény nélkül definiáljuk, és úgy kérdezzük meg, hogy vajon az első két vendég, vagy az utolsó kettő fog-e nagyobb valószínűséggel egy asztalnál ülni, akkor erre – a háttér ismerete nélkül – elég nehéznek látszik a válasz.

Függelék – megoldások

5. feladat. Csak az identitáson, azaz az $1\ 2\ \ldots\ n$ permutáción nem változtat. Minden más permutációnál az első elmozduló szám hátrébb kerül az újrakódolásnál.

7. feladat. Beláttuk, hogy a KÉF minden n elemű véletlen permutációt ugyanolyan valószínűséggel állít elő. De ez azt is jelenti, hogy bármely két vendégre ugyanannyi lesz a valószínűsége annak, hogy ez a két vendég egy asztalnál ül. Elég tehát az első két vendégre kiszámolni ezt a valószínűséget. Az első vendég biztosan az első asztalhoz ül, a második pedig $1/2$ valószínűséggel ül mellé. Ennyi tehát a valószínűsége, hogy n elem egy véletlen permutációjában két előre kijelölt elem egy ciklusban van.

10. feladat. Ismét alkalmazható mind a háromféle megoldás. Kijön számolással. Kijön az újrakódolással is. Most itt is fel kell tennünk, hogy az első szám van kijelölve és a kikötés az, hogy ezek nagyság szerint fordított sorrendben jöjjenek. A csoportok most is azok, mint a korábbi két megoldásban (lásd a 8. feladatnál), minden csoportban $s!$ permutáció van, de ezek közül most minden csoportban csak egy felel meg a kikötésünknek, tehát a keresett valószínűség $1/s!$.

Végül alkalmazható a KÉF is, és most az a kikötés, hogy az első s vendég mindegyike új asztalt kezdjen, ez az i-edik vendég esetében $1/i$ valószínűséggel történik, tehát a keresett valószínűség $1/s!$-nak adódik.

12. feladat. Nincs ellentmondás. Az $A + B$ valószínűségi változó értéke ugyanis akár $2n$ is lehet, ha az összes vendég az első asztalnál ül, azaz az egész permutáció egyetlen ciklus. Ebben az esetben ugyanis, és általában is, ha az első két vendég egy asztalnál ül, azt a ciklust, amelyben ülnek, ez a változó kétszer számolja meg.

13. feladat. Nem. Ez a várható érték nyilvánvalóan nagyobb, hiszen minden olyan eset, amikor az első elem nem a legnagyobb ciklusban van – azaz nem az első asztalnál ülnek a legtöbben – a leghosszabb ciklus várható értékéhez többet ad hozzá, mint az első asztalnál ülők várható értékéhez.

A 3. feladat első megoldásában használt számolással könnyen kijön, hogy ha $k > n/2$, akkor $P(\text{van pontosan } k \text{ hosszú ciklus}) = 1/k$. Másrészt ha van ilyen hosszú ciklus, akkor biztosan ez a leghosszabb, így minden ilyen k-ra 1-et ad a „legnagyobb ciklus hossza" valószínűségi változó várható értékéhez. Ez önmagában $(n+1)/2$, és ehhez jönnek még azok az esetek, amikor csak kisebb ciklusok vannak. Páros n-re is könnyű látni, hogy $P(\text{van pontosan } n/2 \text{ hosszú ciklus}) > 1/n$, tehát a legalább $n/2$ hosszú ciklusok is több, mint $(n+1)/2$-t adnak a várható értékhez.

14. feladat. Elég ezt belátni az első elemről. Tehát a KÉF-nél elég azt belátni, hogy az első vendég asztalánál $1/n$ valószínűséggel ülnek pont k-an (k-tól függetlenül).

$n = 1, 2$-re könnyen belátható az állítás. Tegyük fel, hogy n-re már tudjuk az állítást. Bebizonyítjuk n helyett $(n+1)$-re is.

Azt nézzük, hogy hogyan ülhet pontosan k ember az első asztalnál, miután az $(n+1)$-edik vendég leült. Ez kétféleképp lehetséges:

1) Az utolsó vendég az első asztalhoz ült és így lettek ott k-an. Ez akkor van, ha az első n vendég közül $k-1$ vendég ül az első asztalnál és az utolsó vendég ehhez az asztalhoz ül. Az előbbi valószínűsége az indukciós feltevés szerint $1/n$, az utolsó vendég pedig $\frac{k-1}{n+1}$ valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni.

Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{k-1}{n(n+1)}$.

2) Az utolsó vendég nem ide ült, de már az első n vendég után is k vendég ült az első asztalnál. Utóbbinak megint $1/n$ a valószínűsége az indukciós feltevés szerint. Annak a valószínűsége pedig, hogy az utolsó vendég nem ide ült, $\frac{n+1-k}{n+1}$.

Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{n+1-k}{n(n+1)}$

A két esetet összeadva azt kapjuk, hogy a valószínűség éppen $\frac{1}{n+1}$, és ezt akartuk belátni.

Surányi László