A FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐ ÉRTÉKEINEK MEGHATÁROZÁSA.

-SCHELLBACH-FÉLE MÓDSZER.-

Az első fokú algebrai függvények kivételével valamennyi oly természetű, hogy bennök a független változónak legalább két különböző értéke mellett az $y = f(x)$, egyenlő számot értelmez, azaz: $x = a$ és $x = b$ értékek úgy választhatók, hogy:

$$f(a) = f(b).$$

Ha e körülmény beállhat és nincs x-nek oly értéke a és b között, mely mellett a függvény végtelen naggyá válnék, ekkor mindig bizonyos, hogy van szélső érték, azaz: van x-nek a és b közt oly értéke, mely mellett a függvény legnagyobb, illetőleg legkisebb a szomszédos értékek közt.

Legyen x_m a független változónak az az értéke, mely a szélső értékhez vezet, s jelöljük a függvényt x minden oly értéke mellett, mely kisebb mint x_m, $f(x)$ alakban, minden $x > x_m$ értéknél pedig $f(x')$ alakban, akkor bizonyos, hogy $x = x' = x_m$ mellett:

$$f(x) = f(x')$$

lesz, még pedig azonosan.

A kifejezést redukáljuk zerora, s minthogy az legalább is másodrendű, bontsuk tényezőkre, a mi annyiban mindig elvégezhető, hogy az $x - x'$ lineáris tényező elválasztható. E tényezőt, mely $x = x' = x_m$ mellett azonosan semmisül meg, távolítsuk el osztás által. A visszamaradt egyenletben $x = x'$ tévén, az egyenlet megoldása a független változónak azon értékeit adja, melyek valamely szélső értékhez vezetnek. Azt, hogy a nyert érték maximumhoz vagy minimumhoz vezet-e, külön vizsgálat által vagy a feladat természetéből döntjük el.

Az alkalmazást mutassuk be egy pár példában.

1. Adott háromszöget egyenes által osszunk két egyenlő részre úgy, hogy az osztó távolság minimum legyen. Magában is világos, hogy az egyenes a legkisebb szög szárait vágja.

Feltétel szerint: $2xy = ab$,

ha x és y a legkisebb (C) szög a és b szárain a csúcstól számított, lemetszett darabok.

$d = \sqrt{(x^2 + y^2 - 2xy\cos C)}$ a kívánt távolság, mely x függvényében:

$$d = \sqrt{(x^2 + \left(\frac{ab}{2x}\right)^2 - ab\cos C)}.$$

A módszer értelmében:

$$x^2 + \left(\frac{ab}{2x}\right)^2 - ab\ \cos C = x'^2 + \left(\frac{ab}{2x'}\right)^2 - ab\ \cos C$$

tévén és kellően átalakítván:

$$(x - x')(x + x')(4x^2x'^2 - a^2b^2) = 0\,\text{ered.}$$

Az $x = x'$ mellett azonosan megsemmisülő tényezőt eltávolítván és $x = x'$ tévén:

$$2x(4x^2 - a^2b^2) = 0,\text{honnan}$$

$$x = 0\ \text{vagy:}\, x = \sqrt{\frac{ab}{2}}.$$

Az utolsó érték a kívánt minimumhoz:

$$d = \sqrt{2ab}\sin\frac{C}{2}\text{vezet.}$$

Az osztó vonal párhuzamos az alappal, ha $a = b$.

2. Egy négyzetes alappal bíró gúlában, melynek térfogata a^3 állandó, hogyan kell az alapélnek a magassághoz aránylania, hogy a belőle kivágható koczka a lehető legnagyobb részét tegye a térfogatnak?

Feltétel szerint:

$$x^2y = 3a^3$$

hol x az alapél, y a magasság. A feladat értelmében:

$$V = a^3 - \left(\frac{xy}{x+y}\right)^3$$

függvény minimumát kell keresni, mely x függvényében az első egyenlet tekintetbe vételével:

$$V = a^3 - 27a^6\left(\frac{x}{x^3 + 3a^3}\right)^3$$

$$a^3-27a^6\left(\frac{x}{x^3+3a^3}\right)^3=a^3-27a^6\left(\frac{x}{x^3+3a^3}\right)^3$$

téve és átalakítva:

$$(x_1-x)(xx_1(x+x_1)-3a^3)[(x^2(x_1^3+3a^3)^2+xx_1(x^3+3a^3)(x_1^3+3a^3)+x_1^3(x^3+2a^3)]=0$$

x_1-x tényezőt eltávolítván és $x=x_1$ tévén:

$$3x^3(2x^3-3a^3)(x^3+3a^3)^2=0\,\text{ered},$$

honnan:

$$x=0,\quad x=a\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\ \text{ és }\ x=-a\sqrt[3]{3}\,\text{erednek.}$$

x a feladat természete szerint csak positív mértékszámú lehet, s így $x=a\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ vezet a V minimumához, vagy, a mi ugyanaz a kivágható legnagyobb koczkához.

A pyramis magassága.

$$y=2a\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\ \text{és így:}$$

$$x:y=1:2.$$

$$2x=y,\quad \text{a magasság az alapél kétszerese.}$$

A koczka térfogata:

$$z=\frac{xy}{x+y}=a\ \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\ \text{-ből}$$

$$z^2=\frac{4}{9}a^3.$$

3. Egy egyenes vonalnak, mely a vízszinteshez α szög alatt hajlik, mely pontjából látható a vízszintesen adott két pontnak (A, B) távolsága a legnagyobbnak?

Legyen a vonalak metszéspontja O; $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$ és legyen az adott irányú egyenesben C pont a kívánt tulajdonságú, melynek O-tól mért távolsága x.

$$BCO=u,\quad ACO=v\quad \text{és így:}$$

$$C=u-v.$$

A származott háromszögekből:

$$a:x=\sin v:\sin(a+v)=1:(\sin\alpha\ \cot v+\cos\alpha);$$

$$b:x=\sin u:\sin(a+u)=1:(\sin\alpha\ \cot u+\cos\alpha),$$

melyekből:

$$\tan u=\frac{b\ \sin\alpha}{x-b\cos\alpha}\ \tan v=\frac{a\ \sin\alpha}{x-a\ \cos\alpha}$$

tehát:

$$\tan C=\frac{x(b-a)\sin\alpha}{x^2-(a+b)x\cos\alpha+ab}\ \text{a kívánt függvény.}$$

$$\frac{x(b-a)\sin\alpha}{x^2-(a+b)\cos\alpha+ab}=\frac{x_1(b-a)\sin\alpha}{x_1^2-(a+b)\cos\alpha+ab}\ \text{téve és átalakítva:}$$

$$\frac{x-x_1}{x_1}=\frac{x^2-(a+b)x\cos\alpha+ab}{x_1^2-(a+b)x_1\cos\alpha+ab},\text{honnan:}$$

$$\frac{x-x_1}{x_1}=\frac{x^2-x_1^2-(a+b)\cos\alpha(x-x_1)}{x_1^2-(a+b)x_1\cos\alpha+ab}$$

$x-x_1$ tényezőt eltávolítván és $x=x_1$ tévén:

$$\frac{1}{x}=\frac{2x-(a+b)\cos\alpha}{x^2-(a+b)x\cdot\cos\alpha+ab},\text{mely egyenletből;}$$

$$x^2=ab\,\text{és}$$

$$x=\sqrt{ab},\ \text{tehát független } \alpha \text{ szögtől.}$$

$$tanC\max=\frac{(b-a)\sqrt{ab}\cdot\sin\alpha}{ab-(a+b)\sqrt{ab}\cdot\cos\alpha+ab}=\frac{(b-a)\sin\alpha}{2\sqrt{ab}-(a+b)\cos\alpha}$$

4. A körbeírható parallelogrammák közül melyiknek kerülete a legnagyobb?
Legyen a szélesség $2x$, a magasság $2y$ és a küllő $= r$.

$$K = 4x + 4y \text{ és}$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ tehát}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ azaz:}$$

$$K = 4(x + \sqrt{(r^2 - x^2}) = 4(x_1 + \sqrt{(r^2 - x_1^2})$$

$$x - x_1 = \sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Az irrationalistás megszüntetni nem szükséges, hanem az eljárás ez:

$$x - x_1 = \frac{x^2 - x_1^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2} + \sqrt{r^2 - x^2}},$$

honnan $x - x_1$ eltávolítása után:

$$1 = \frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \text{ melyből:}$$

$$x = r\frac{\sqrt{2}}{2} = y. \quad \text{A mi a beírt négyzet féloldala.}$$

5. Négy egyenként a méter széles deszkából úgy kell víztartó csatornát alkotni, hogy kettő párhuzamos lévén az első kettő egymáshoz hajoljék. A két alsó deszka mely hajlása mellett fér a csatornába a legtöbb víz?

A térfogat maximum lesz, ha a származó hasáb keresztmetszete max. területű. E keresztmetszet egy $2x$ szélességű és a magassága rectangulum és egy a szárú egyenlő szárú háromszög összege, tehát:

$$T = 2ax + \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi,$$

ha az alsó deszkák hajlása: 2φ.

$$x = a\sin\varphi \quad \text{lévén,}$$

$$T = 2a^2\ \sin\varphi + \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi \quad \text{azaz:}$$

$$T = a^2\ \sin\varphi(2 + \cos\varphi)$$

$$a^2\ \sin\varphi(2 + \cos\varphi) = a^2\sin\varphi_1(2 + \cos\varphi_1)$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{2 + \cos\varphi_1}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_1}{\sin\varphi_1} = \frac{cos\varphi_1 - \cos\varphi}{2 + \cos\varphi}$$

$$\frac{2\cos\dfrac{\varphi + \varphi_1}{2}\ \sin\dfrac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\sin\varphi} = \frac{2\sin\dfrac{\varphi + \varphi_1}{2}\sin\dfrac{\varphi - \varphi_1}{2}}{2\cos\varphi}$$

$2\sin\dfrac{\varphi - \varphi_1}{2}$-vel, mely $\varphi = \varphi_1$ mellett megsemmisül osztva és $\varphi = \varphi_1$ téve:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2 + \cos\varphi}$$

$$2\cos + \cos^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$

$$2\cos^2\varphi + 2\cos\varphi = 1 \quad \text{és} \quad \cos\varphi = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$\cos\varphi$ második értéke képtelenség.

Maksay Zsigmond.