

Feynman és a legkisebb hatás elve

Egy emlékezetes feladat

Az 1930-as évek elején történt, hogy a középiskolában unatkozni látszó (később Nobel-díjas fizikus) *Richard Feynman* tanára a következő feladattal kívánta felélnéni: Győződjön meg arról, hogy egy eldobott tárgy két adott időpont között (adott repülési idő mellett) éppen azt a röppályát „választja”, amelyet a mechanikai *legkisebb hatás elve* (másnéven *Hamilton-elv*) előír számára [1]. Az elv szerint a repülés kezdeti t_1 és végső t_2 időpontja közötti $t_2 - t_1 = T$ időben *valamennyi elképzelhető mozgáspálya közül* az valósul meg, amelyen a K kinetikus és V potenciális energia különbségének, az $L(t) = K(t) - V(t)$ függvénynek a mozgás során vett időbeli átlagértéke, amit $\langle L \rangle$ módon jelölünk, minimális¹.

Feynman ezt az elvet „elbűvölően érdekesnek” találta, és lelkesedése az évek során sem csökkent. Az addig csak a klasszikus fizikában alapvető hatáselv, pályafogalom Feynman nyomán bekerültek a részecskefizika kvantummechanikai eszköztárába.

Mivel a legkisebb hatás elve a mai középiskolásokat is érdekelheti, nézzük meg Feynman feladatát egy speciális esetben, ahol elegendő az egyenletesen gyorsuló mozgás ismerete, a matematikai analízis módszereire, variációs számításra nincs szükség.

Az elv működésben

A kiindulási helyzet: valaki $t_1 = 0$ pillanatban labdát dob fel az x_a távolságban álló ház y_a magasan lévő emeleti ablakában várakozó társának. Az ablak vízszintes (x) és függőleges (y) tengelyeken mért koordinátái a mozgás síkjában (x_a, y_a) , a labdáé a feldobás pillanatában $(0, 0)$. Az iskolában tanultak szerint a labda pályája parabola, a mozgást leíró egyenletek a t idő függvényében

$$(1) \quad x = ut, \quad y = -\frac{g}{2}t^2 + \left(\frac{uy_a}{x_a} + \frac{gx_a}{2u} \right) t$$

(ahol g a nehézségi gyorsulás). A repülés teljes T idejét az x irányú, állandó $v_x = u$ sebesség rögzíti: $T = x_a/u$. A kicsit szokatlan alakban felírt (1) összefüggésben a függőleges irányú kezdősebességet az $y(t = T) = y_a$ feltétel rögzíti.

Ha tehát az elv „működik”, akkor például a $(0, 0)$ és az (x_a, y_a) pontokon átmenő, ugyanakkora T repülési idővel, de egy *tetszőlegesen* választott a paraméterrel jellemzett,

$$(2) \quad x = ut, \quad y = -at^2 + \left(\frac{uy_a}{x_a} + \frac{ax_a}{u} \right) t$$

egyenletekkel leírt parabolapályán az $L(t) = K(t) - V(t)$ (az ún. Lagrange-függvény) *időbeni átlagértéke*, $\langle L \rangle$, bármely $a \neq g/2$ választása esetén *nagyobb kell legyen*, mint a ténylegesen megvalósuló $a = g/2$ pálya esetén.

Megjegyzés. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a labda mozgása x irányban egyenletes. A legkisebb hatás elve megengedné ugyan, hogy másféle időfüggésű mozgásokra is kiszámítsuk a Lagrange-függvény átlagát, és ezek minimumát keressük, de ekkor ismét a variációs számítás matematikai nehézségeibe ütköznénk. Ha olyan mozgások körében keressük a legkisebb hatást, amelyek mindössze egyetlen paramétertől, az a mennyiségtől függenek, a probléma egy egyváltozós, ráadásul kvadrátikus függvény szélsőértékének megkeresésére egyszerűsödik, ez pedig elemi úton, (teljes négyzetté alakítással) megoldható.

A (2) egyenletekkel leírt mozgás x irányban egyenletes, y irányban egyenletesen gyorsuló, ezért

$$v_x = u, \quad v_y = -2at + \left(\frac{uy_a}{x_a} + \frac{ax_a}{u} \right).$$

Ezzel az m tömegű tárgy Lagrange-függvénye:

$$\begin{aligned} L &= K - V = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) - mgy = \\ &= \frac{m}{2} \left[u^2 + \left(-2at + \frac{uy_a}{x_a} + \frac{ax_a}{u} \right)^2 \right] - mg \left[-at^2 + \left(\frac{uy_a}{x_a} + \frac{ax_a}{u} \right) t \right], \end{aligned}$$

ami $u = x_a/T$ felhasználásával így is felírható:

$$L = \frac{m}{2} \left[\frac{x_a^2}{T^2} + \left(-2at + \frac{y_a}{T} + aT \right)^2 \right] - mg \left[-at^2 + \left(\frac{y_a}{T} + aT \right) t \right].$$

¹ A szakirodalomban a „legkisebb hatáson” az $S = (t_2 - t_1)\langle L \rangle$ *hatásfüggvény* minimumát (általánosan stacionárius, vagyis a pálya kis változtatására „első közelítésben” változatlanul maradó) értékét értik. De mivel $(t_2 - t_1)$ rögzített, S minimuma egyben $\langle L \rangle$ minimuma is. (Az átlagértéket használó megfogalmazás Feynmantól ered [1].) A „pálya” itt nemcsak a pályagörbe *alakjára* vonatkozik, az elv a pályagörbe meghatározásán túl a megvalósuló mozgás teljes, tér- és időbeli leírását adja.

Mivel ez a kifejezés t -ben kvadratikus, időbeli átlagértéke elemi számolással megkapható.

$$\langle L \rangle = \langle A \cdot t^2 + B \cdot t + C \rangle = A \langle t^2 \rangle + B \langle t \rangle + C,$$

ahol

$$\begin{aligned} A &= ma(2a + g), \\ B &= -m(g + 2a) \left(\frac{y_a}{T} + aT \right), \\ C &= m \left(\frac{x_a^2 + y_a^2}{2T^2} + \frac{a^2 T^2}{2} + ay_a \right) \end{aligned}$$

időfüggetlen kifejezések.

Látható, hogy csak t^2 és t átlagára van szükségünk a $(0, T)$ intervallumon, ami definíció szerint a függvény alatti terület elosztva az időintervallum hosszával. A t^2 parabola alatti területet a $(0, T)$ szakaszon már Arkhimédész kiszámította [2], ez $\frac{1}{3}T^3$, tehát $\langle t^2 \rangle = \frac{1}{3}T^2$, és nyilvánvalóan $\langle t \rangle = \frac{1}{2}T$. Ezzel, valamint A , B és C beírásával kapjuk:

$$\langle L \rangle = \langle K - V \rangle = \frac{m}{2} \left[\frac{1}{3}T^2 \left(a - \frac{g}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_a^2 + y_a^2}{T^2} - gy_a - \frac{g^2 T^2}{12} \right) \right].$$

Ez a kifejezés $a = \frac{g}{2}$ -nél valóban minimális, bármely „hegyesebb” ($a > g/2$) vagy „laposabb” ($a < g/2$) pálya (és az $a = 0$ egyenes is) nagyobb $\langle L \rangle$ -re vezet.

De honnan tudja a labda?

A legkisebb hatás elve tehát parabolapályákra szorítkozva beigazolódott, de az elv *minden más alakú pályát* tekintetbe véve is a jó eredményt adja [1].² De hogyan? A labda ismeri a távoli jövőjét? Tudja minden $0 < t < T$ pillanatban, merre kell továbbrepülnie ahhoz, hogy a már megtett és a *még hátralévő utat* is magában foglaló egész pályájára számított $\langle L \rangle$ átlagérték (és vele az S hatásfüggvény) valamennyi elképzelhető pálya közül a legkisebbnek bizonyuljon?

A távoli jövő előrelátása a *klasszikus mechanika szerint* valójában nem szükséges, mert a legkisebb hatás elvéből *matematikailag következnek* a labda *közvetlen* jövőjét minden helyen és időpontban meghatározó Newton-féle mozgásegyenletek (és viszont, a Newton-egyenletekből levezethető a hatáselv), ezért nem csoda, hogy a megvalósuló pálya éppen az, amelyen $\langle L \rangle$ minimális. A hatáselv a klasszikus mechanikában egyszerűen a mozgásegyenletek matematikailag tömör, előnyös (koordináta-rendszertől független) megfogalmazásának tekinthető.

De ha ez csak egyszerű matematika, mit talált korának egyik legnagyobb fizikusa (aki idén éppen 100 éves lenne) a legkisebb hatás elvében „elbűvölően érdekesnek”? Hogyan „vizsgálják meg” a részecskék a kvantumfizika Feynman-féle megfogalmazásában az összes elképzelhető pályát ahhoz, hogy kiválasszák az optimálisat, a megvalósulót? Erről egy következő írásban lesz szó, ahol a legkisebb hatás elve és néhány további, hasonlóan „célt megfogalmazó” (integrális) fizikai elv kapcsolatára is fény derül.

Irodalom

- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Mai fizika 6.*, 71. fejezet, Műszaki Könyvkiadó, 1970.
- [2] Simonovits András: *Válogatott fejezetek a matematika történetéből*, 25. old., Typotex, 2009.

Solt György
Svájc, Zug

²A legkisebb hatás elvét *L. Euler* (1707–1783) és *J. L. Lagrange* (1736–1813) ilyen irányú eredményeiket felhasználva mai formájában *W. R. Hamilton* (1805–1865) fogalmazta meg 1834-ben.