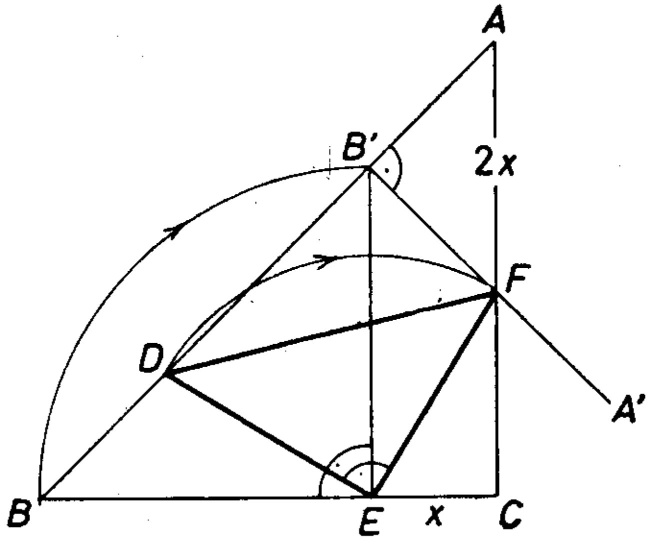
Legyenek az adott háromszög csúcsai A, B, C úgy, hogy $AC = BC$, a beírt háromszög csúcsa az AB átfogón D, a BC, CA befogón E, illetve F. Két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a beírt háromszög derékszögének csúcsa az eredeti háromszög átfogóján van-e, azaz D-ben, vagy pedig valamelyik befogóján. (Az már mindegy, hogy E-ben vagy F-ben, mert a befogók egyenlőségük miatt egyenrangúak.)

1. Legyen először $DEF\sphericalangle = 90°$, vagyis egyszersmind $ED = EF$, ekkor könnyen szerkeszthetünk megfelelő háromszöget a BC-n fölvett E pontból kiindulva. Fordítsuk el az egész alakzatot E körül $90°$-kal abban az irányban, hogy az EB félegyenes új, EB' helyzete (képe) messe a BA szakaszt (1. ábra).



1. ábra

Ekkor a metszéspont éppen B', hiszen így $CBA\sphericalangle = 45°$ miatt$B'E = BE$.

Továbbmenve, a BA egyenes új helyzete a B'-ben BA-ra állított merőleges lesz, és ezen lesz rajta D-nek D' képe. Ámde követelésünk mellett D'-nek F-be kell esnie, eszerint a választott E-hez tartozó F-et egyértelműen kimetszi AC-ből az utóbbi merőleges. Továbbá F ismeretében D-t az E-ben EF-re állított merőlegessel metszhetjük ki BA-ból és arra valóban $ED = EF$. – Könnyű belátni, hogy minden olyan E-hez tartozik megfelelő beírt háromszög, amelyre $EC < EB$, viszont más E-hez nem tartozik.

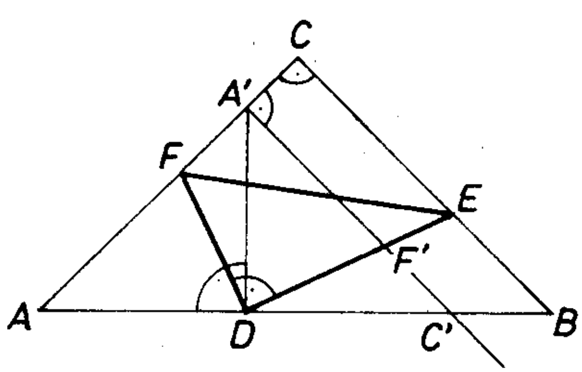
Legyen $CA = 1$, és jelöljük EC-t x-szel – ahol $0 < x < 1/2$ –, így az AFB' háromszög révén $AF = 2x$, tehát $CF = 1 - 2x$, és a DEF háromszög területe, mindjárt teljes négyzetté kiegészítve

$$\frac{1}{2} \cdot EF^2 = \frac{1}{2}(CE^2 + CF^2) = \frac{1}{2}\big(x^2 + (1-2x)^2\big) = \frac{5}{2}\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{10}.$$

Látható innen, hogy a terület legkisebb értéke $1/10$ és ezt $x = 2/5$ mellett fel is veszi, ez az érték benne van az x-re megállapított intervallumban.

Másfelől az ABC háromszög területe $1/2$, ennek $1/5$ részét teszi ki a DEF háromszög területére talált minimális érték.

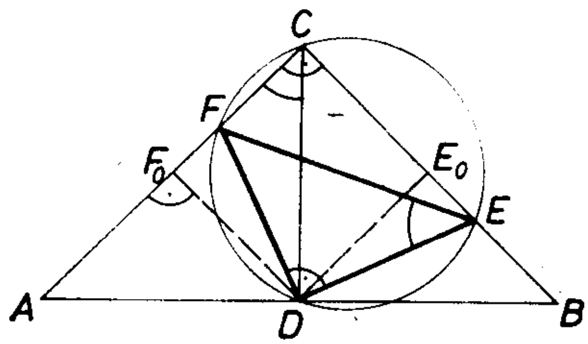
2. Legyen most $EDF\sphericalangle = 90°$ és vele együtt $DE = DF$. Fordítsuk el az alakzatot D körül $90°$-kal abban az irányban, hogy a DF' félegyenes messe a CB egyenest. (Ez elérhető, mert D belső pont az AB oldalszakaszon.) Ekkor A-nak A' képe a D-ben AB-re állított merőleges és az AC egyenes metszéspontja, míg az AC egyenes képe az A'-ben AC-re állított merőleges, ezen lesz F' (2. ábra).



2. ábra

Megfelelő DEF háromszög esetében F' egybeesik E-vel, ami viszont a C csúcsban AC-re állított merőlegesen van. Eszerint megfelelően beírt háromszög csak akkor lehetséges, ha a két merőleges azonos, vagyis A' azonos C-vel; evégett pedig D-ként az AB átfogó felezőpontjából kellett kiindulnunk.

Ebben a beírásmódban is végtelen sok megfelelő DEF háromszög létezik, de most amiatt, hogy E-t nem kapjuk meg egyértelműen, az AC oldal belsejében tetszőlegesen vett F-hez tartozik megfelelő E csúcs (3. ábra).



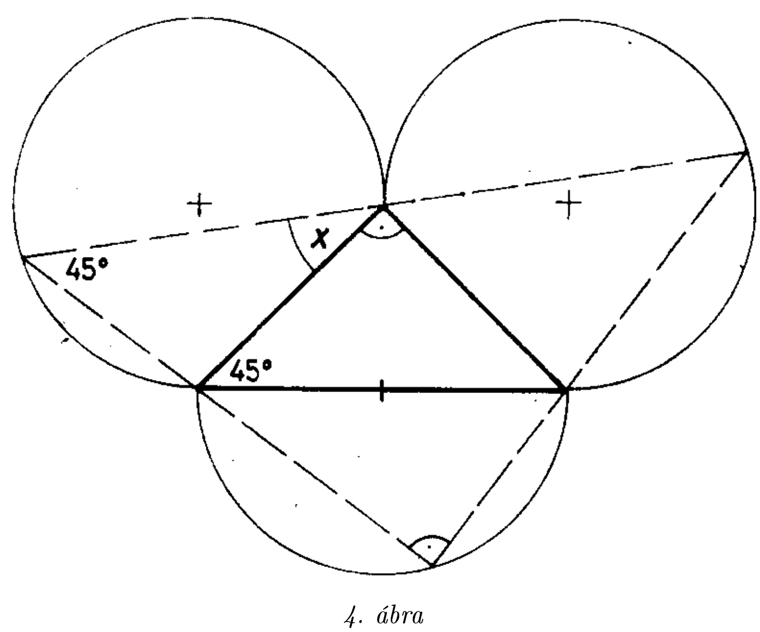
3. ábra

Mivel a DEF háromszög területe $DF^2/2$, nyilvánvalóan akkor legkisebb ez, ha DF_0 merőleges AC-re, és ekkor $DF_0 = 1/2$, a terület $1/8$, az ABC háromszög területének $1/4$ része.

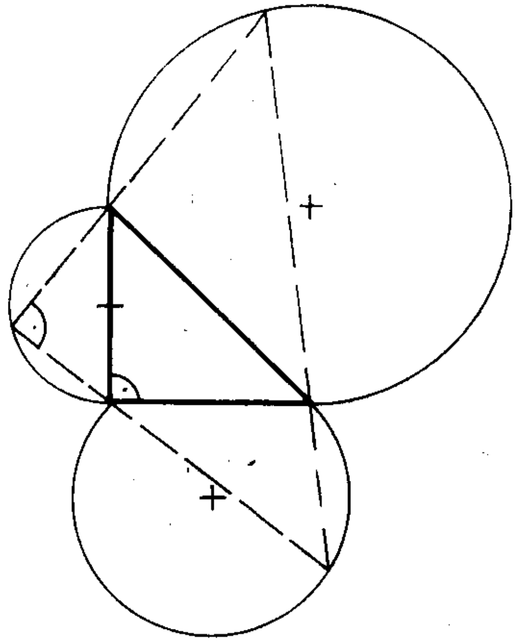
Ez a minimális érték nagyobb, mint amit az első beírásmód mellett kaptunk, tehát az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe beírt egyenlő szárú derékszögű háromszög területe legalább $1/5$ része a befogadó háromszög területének, és ezt a legkisebb értéket akkor kapjuk, ha a beírt háromszög derékszögének csúcsa az egyik befogón van, és távolsága az első háromszög derékszög csúcsától $2a/5$ távolságban, ahol a a befogó hossza.

Megjegyzések. 1. A második beírásmód mellett $DA = DB$ szükségessége abból is kiadódik, hogy a $CEDF$ négyszög – a szemben fekvő derékszögei alapján – húrnégyszög, és így $ACD\sphericalangle = FCD\sphericalangle = FED\sphericalangle = 45°$.

2. Előkészíthetjük válaszunkat „a feladat megfordításának elve” alapján is, vagyis hogy rögzített egyenlő szárú derékszögű háromszög köré maximális területű egyenlő szárú derékszögű háromszöget akarunk írni. Ebben a felfogásban az A, B, C csúcsok egy-egy látóköríven mozognak (4–5. ábra). Ajánljuk az érdeklődőknek az ötlet kidolgozását.



4. ábra



5. ábra

3. Gyakori hiba volt – már a versenyen is –, hogy az első beírásmód mellett D, E, F-et az illető oldal egyik harmadoló pontjának vették. Így a terület aránya $2/9 > 2/10 = 1/5$, nem a minimumot kapjuk.