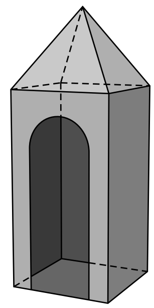
1. *Egy katonai laktanyában az* ábrán *látható őrbódéban őrködnek a katonák. A* 3,5 m *magas építmény egy négyzetes hasábból és egy hozzá kapcsolódó szabályos négyoldalú gúlából áll. Bejárata téglalap alakú, annak felső, rövidebb oldalára illesztett félkörrel. A négyzetes oszlop alapéle* 1,3 m, *magassága* 2,5 m, *míg a bejárat téglalap alakú része* 0,8 m *széles és* 1,8 m *magas.*



a) Mennyibe kerül az őrbódé külső lefestése, ha 1 m^2 *felület lefestéséhez* 1,5 dl *festék szükséges, melynek literje* 3200 Ft? *(Az őrbódé tetejét is festjük, ajtaját azonban nem.)* *(6 pont)*

A laktanyában a hétvégi (pénteki, szombati és vasárnapi) éjszakai őrség kialakításakor a parancsnok az alábbi szempontokat veszi figyelembe:

- *Minden katona legalább egy éjszaka őrködjön, de ne legyen olyan katona, aki mindhárom éjszaka őrségben van.*
- *A teljes létszámnak a fele teljesítsen pontosan két éjszaka őrszolgálatot.*
- *Az őrség létszáma az első éjszaka* 16 *fő, a második éjszaka* 22 *fő, míg a harmadik éjszaka* 10 *fő.*

b) Hány katona vett részt az éjszakai őrségben? *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Az őrbódé külső lefestéséhez szükséges festék mennyiségének meghatározásához számítsuk ki az építmény felszínét. A szabályos négyoldalú gúla oldallapjának m magassága a Pitagorasz-tétellel: $m = \sqrt{1^2 + 0{,}65^2} = \sqrt{1{,}4225}$, így a gúla felszíne:

$$A_{\text{gúla}} = 4 \cdot \frac{1{,}3 \cdot \sqrt{1{,}4225}}{2} \approx 3{,}1\ (\mathrm{m}^2).$$

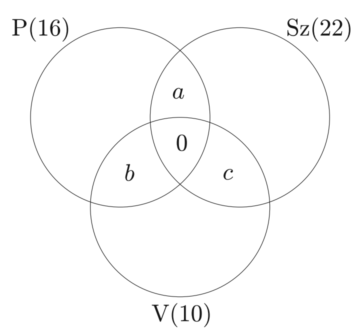
A négyzetes hasáb felszíne:

$$A_{\text{hasáb}} = 4 \cdot 1{,}3 \cdot 2{,}5 - \left(0{,}8 \cdot 1{,}8 + \frac{0{,}4^2\pi}{2}\right) \approx 11{,}3\ (\mathrm{m}^2).$$

Az őrbódé felszíne a gúla és a hasáb felszínének az összege, vagyis $A_{\text{bódé}} \approx 14{,}4\ (\mathrm{m}^2)$.

Az őrbódé külső lefestéséhez 3 doboz 1 literes festéket kell megvenni, így a lefestés 9600 Ft-ba kerül.

b) A feladatban megadott feltételek alapján az alábbi *halmazábra* készíthető:



Ha x jelöli az éjszakai őrségben résztvevők számát, akkor $a + b + c = \dfrac{x}{2}$. A három halmaz uniójának elemszámát felírva:

$$16 + 22 + 10 - \frac{x}{2} - 2 \cdot 0 = x, \quad \text{így} \quad x = 32.$$

Tehát 32 katona vett részt az éjszakai őrségben.

2. *Egy szabályos dobókockával* 20*-szor dobva* 5 db *egyest,* 5 db *kettest,* 4 db *hármast,* 3 db *négyest és* 3 db *ötöst dobtunk.*

a) Számítsuk ki a dobott számok átlagát és szórását. *(3 pont)*

A dobott számok közül 4 db*-ot véletlenszerűen kiválasztunk.*

b) Hány esetben lesz a kiválasztott számok között legalább egy hármas? *(4 pont)*

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy kiválasztott szám különböző? *(6 pont)*

Megoldás. *a*) A dobott számok átlaga $\dfrac{54}{20} = 2{,}7$, szórása

$$\sqrt{\frac{5\cdot(-1{,}7)^2+5\cdot(-0{,}7)^2+4\cdot 0,3^2+3\cdot 1,3^2+3\cdot 2,3^2}{20}}=\sqrt{1{,}91}\approx 1{,}38.$$

b) Az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát. A 20 dobott számból 4-et minden lehetséges módon $\binom{20}{4} = 4845$-féleképpen választhatunk ki, ez az összes eset száma.

Kedvezőtlen esetek azok, amelyekben a kiválasztott számok között nincs hármas, melyek száma $\binom{16}{4} = 1820$.

Összesen tehát $4845 - 1820 = 3025$ esetben lesz a kiválasztott számok között legalább egy hármas.

c) A 20 dobott számból 4-et minden lehetséges módon $\binom{20}{4} = 4845$-féleképpen választhatunk ki, ez az összes eset száma.

Ha a kiválasztásnál az 1-esből vagy a 2-esből nem választunk, de a többiből egyet-egyet igen, akkor a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}^2 = 180$.

Ha a kiválasztásnál a 3-asból nem választunk, de a többiből egyet-egyet igen, akkor a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1}^2\cdot\binom{3}{1}^2 = 225$.

Ha a kiválasztásnál a 4-esből vagy az 5-ösből nem választunk, de a többiből egyet-egyet igen, akkor a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1}^2\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1} = 300$.

A keresett valószínűség (a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa):

$$p=\frac{2\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}^2+\binom{5}{1}^2\cdot\binom{3}{1}^2+2\cdot\binom{5}{1}^2\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{20}{4}}=\frac{79}{323}\approx 0{,}2446.$$

3. *a*) *Az* $\mathbf{u}(1;\log_8 x)$ *és* $\mathbf{v}(\log_2 x;-1)$ *vektorok merőlegesek egymásra. Határozzuk meg* x *értékét* $(x>0)$. *(5 pont)*

b) *Adott a síkon* n *db pont, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre* $(n\ge 3)$. *Határozzuk meg* n *értékét, ha a pontok* 20*-szor annyi négyszöget határoznak meg, mint egyenest.* *(8 pont)*

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk nulla.

A skaláris szorzatot a koordináták segítségével felírva megoldandó az alábbi egyenlet: $\log_2 x - \log_8 x = 0$. A 8-as alapú logaritmust átírva: $\log_8 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8}$, mellyel a megoldandó egyenlet $\log_2 x = 0$, ahonnan $x = 1$, mely megoldása a feladatnak.

II. megoldás. A $\mathbf{v}$ vektor akkor merőleges az $\mathbf{u}$ vektorra, ha $\mathbf{v}$ koordinátáit felcserélve, és egyiknek az előjelét megváltoztatva éppen $\mathbf{u}$ koordinátáit kapjuk. Az előbbiek miatt megoldandó az alábbi egyenlet: $\log_8 x = \log_2 x$. A 8-as alapú logaritmust átírva: $\log_8 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8}$, mellyel a megoldandó egyenlet $\log_2 x = 0$, ahonnan $x = 1$, mely megoldása a feladatnak.

b) n db a feltételeknek megfelelő pont $\binom{n}{4}$ db pontnégyest, és $\binom{n}{2}$ db egyenest határoz meg, tehát megoldandó az $\binom{n}{4} = 20\cdot\binom{n}{2}$ egyenlet. Az előbbi egyenlet az alábbi alakban írható:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=20\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}.$$

Az $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\ne 0$ kifejezéssel osztva az egyenlet mindkét oldalát: $\dfrac{(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot 3} = 20$, melyből az $n^2-5n-234=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Az egyenlet pozitív gyöke 18 (negatív gyöke -13), tehát a pontok száma 18.

Ellenőrzés: a 18 pont 3060 db négyszöget, illetve 153 db egyenest határoz meg, és $20\cdot 153 = 3060$.

4. *Adott az* $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto x^4+3x^2+1$ *függvény.*

a) *Igazoljuk, hogy az* f *függvény szigorúan monoton csökken a negatív valós számok halmazán.* *(3 pont)*

b) *Igazoljuk, hogy az* f *függvény páros.* *(4 pont)*

c) *Adjuk meg az* f *függvénynek azt az* F *primitív függvényét, amelyre* $F(-1)=2$. *(4 pont)*

d) *Állapítsuk meg a* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^4}$ *határértéket.* *(3 pont)*

Megoldás. *a*) Az f függvény differenciálható az értelmezési tartományán és $f'(x) = 4x^3 + 6x$.

Ha $x < 0$, akkor $4x^3 < 0$ és $6x < 0$, így $f'(x) < 0$.

Ha $x < 0$ és $f'(x) < 0$, akkor az f függvény szigorúan monoton csökken a negatív valós számok halmazán.

b) Az f függvény páros, ha az értelmezési tartomány bármely x_0 eleme esetén $-x_0$ is eleme az értelmezési tartománynak és bármely x_0-ra $f(x_0) = f(-x_0)$.

Az f függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, ezért bármely x_0 esetén annak ellentettje is eleme az értelmezési tartománynak.

$$f(x_0) = x_0^4 + 3x_0^2 + 1, \quad f(-x_0) = (-x_0)^4 + 3(-x_0)^2 + 1.$$

Mivel egy valós számnak és ellentettjének negyedik hatványa, valamint négyzete megegyezik, ezért $f(x_0) = f(-x_0)$, tehát az f függvény páros.

c)

$$\int \left(x^4 + 3x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + x^3 + x + C.$$

Mivel $F(-1) = 2$, így $\dfrac{(-1)^5}{5} + (-1)^3 + (-1) + C = 2$, ahonnan $C = \dfrac{21}{5}$. A keresett függvény:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + x^3 + x + \frac{21}{5}.$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1}.$$

Mivel $x \to \infty$, így az előbbi tört számlálója 0-hoz, nevezője 1-hez tart, ezért a keresett határérték 0.

II. rész

5. *a*) *A tízes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő három elemét alkotják. Ha a háromjegyű számot elosztjuk a számjegyeinek összegével, 26-ot kapunk. Ha az eredeti számban a százasok és az egyesek számát felcseréljük, az eredetinél 396-tal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám?* *(7 pont)*

b) *Adjuk meg azokat a különböző számjegyekből álló tízes számrendszerben felírt $\overline{a6c}$ alakú háromjegyű számokat, amelyek a 4, 6 és 9 számok közül pontosan kettővel oszthatók.* *(7 pont)*

c) *Lehet-e $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ négyzetszám, ha a, b és c különböző prímszámok, p, q és r pedig különböző páratlan egészek?* *(2 pont)*

Megoldás. *a*) Jelöljük az eredeti számban a tízesek helyén álló számjegyet b-vel, ekkor a feladatban megfogalmazott feltétel alapján a százasok helyén $b-d$, az egyesek helyén $b+d$ áll, ahol d a számtani sorozat differenciája. Az előbbiek felhasználásával az eredeti háromjegyű szám: $100(b-d) + 10b + b + d = 111b - 99d$.

Ha az eredeti számot elosztjuk a számjegyeinek összegével, akkor $\dfrac{111b - 99d}{3b} = 26$, ahonnan $b = 3d$. Ha az eredeti szám számjegyeit felcseréljük, akkor a felcserélt szám: $100(b+d) + 10b + b - d = 111b + 99d$ lesz.

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $111b - 99d = 111b + 99d - 396$, ahonnan $d = 2$. A keresett szám a 468.

Ellenőrzés: a 468 háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében valóban egy számtani sorozat három egymást követő elemét alkotják, és $\dfrac{468}{4+6+8} = 26$, továbbá $864 - 468 = 396$.

b) Egy háromjegyű szám a 4, 6 és 9 számok közül pontosan kettővel osztható, ha

I. eset: osztható 4-gyel és 9-cel, de nem osztható 6-tal;

II. eset: osztható 4-gyel és 6-tal, de nem osztható 9-cel;

III. eset: osztható 6-tal és 9-cel, de nem osztható 4-gyel.

I. eset: Ha $4 \mid \overline{a6c}$ és $9 \mid \overline{a6c}$, akkor $2 \mid \overline{a6c}$ és $3 \mid \overline{a6c}$, amiből következik, hogy $6 \mid \overline{a6c}$, tehát ilyen eset nem lehetséges.

II. eset: Ha $4 \mid \overline{a6c}$ és $6 \mid \overline{a6c}$, akkor $\overline{6c}$-nek 4-gyel oszthatónak kell lennie, továbbá teljesülnie kell annak is, hogy $3 \mid a + 6 + c$, de 9-cel ne legyen osztható $a + 6 + c$.

Az előbbi feltételek csak akkor teljesülnek ($a \neq c$-t is figyelembevéve), ha $(a;c) = (9;0)$, $(2;4)$, $(5;4)$, $(1;8)$ vagy $(7;8)$.

III. eset: Ha $6 \mid \overline{a6c}$ és $9 \mid \overline{a6c}$, akkor a 2-vel való oszthatóság miatt c-nek párosnak kell lennie, továbbá $9 \mid a+6+c$, de $\overline{6c}$ nem lehet 4-gyel osztható.

Az előbbi feltételek $a \neq c$ esetén pontosan akkor teljesülnek, ha $(a;c) = (1;2)$.

Az összes megfelelő háromjegyű szám: 162; 168; 264; 564, 768, 960.

c) Mivel egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páros, ezért $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ nem lehet négyzetszám.

6. *Egy földmérő noteszában egy vízszintes háromszög alakú telekről a következő bejegyzés olvasható:* „A telek három sarkán villanypózna, fúrt kút és gázcsonk található. A villanypózna a fúrt kúttól 46 méterre, a fúrt kút a gázcsonktól 20 méterre található. A villanypóznánál állva a fúrt kút és a gázcsonk alkotta szakasz 25°-os szögben látszik."

a) Számítsuk ki a háromszög alakú telek lehetséges *területét.* (*5 pont*)

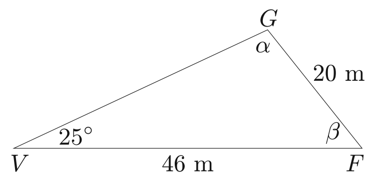
Az előbbi telken a víz-, a gáz- és az elektromos ellátottság nagyon fontos, ugyanis azon kereskedelmi egység épül. Az elektromos rendszer költsége a víz- és a gázellátás költségeinek mértani közepe. Ha a gázellátás költségeit 100 000 Ft-*tal csökkentenénk, akkor a víz-, az elektromos- és a gázellátás költségei ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnának. Az elektromos költségek a vízellátás költségeinek* 150%*-át teszik ki.*

b) Mennyibe kerülnek a felsorolt közművek egyenként? (*6 pont*)

A telken a víz-, gáz- és az elektromos ellátottság kivitelezésére hat árajánlat érkezett hat különböző vállalkozástól.

c) Igazoljuk, hogy a versenytárgyalás résztvevői között biztosan van három olyan személy, akik kölcsönösen ismerik, vagy három olyan, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (Egy vállalkozást egy tárgyalópartner képvisel). (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje a háromszög alakú telek egyik sarkában lévő villanypóznát V, a másikban lévő fúrt kutat F, míg a harmadik csúcsban lévő gázcsonkot G.



A VFG háromszögben a szinusztételt alkalmazva: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 25^\circ}=\dfrac{46}{20}$, ahonnan $\alpha_1\approx 76{,}41^\circ$ vagy $\alpha_2\approx 103{,}59^\circ$.

Az előbbi szögek ismeretében a megfelelő α szögekhez tartozó β szögek a háromszög belső szögeinek összege alapján: $\beta_1\approx 78{,}59^\circ$ vagy $\beta_2\approx 51{,}41^\circ$.

A háromszög alakú telek lehetséges területe a trigonometrikus területképlet alapján:

$$T_{VFG}=\frac{46\cdot 20\cdot\sin\beta_1}{2}\approx 451\ \mathrm{m}^2\quad\text{vagy}\quad T_{VFG'}=\frac{46\cdot 20\cdot\sin\beta_2}{2}\approx 360\ \mathrm{m}^2.$$

b) Jelölje a vízellátás költségét V, a gázellátásét G, míg az elektromos rendszerét E. A feladat szövege alapján $E=\sqrt{V\cdot G}$ és $E=1{,}5\cdot V$. Mivel a számtani sorozat n-edik ($n>1$) eleme a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemek számtani közepe, ezért a következő egyenlet írható fel:

$$V+2{,}25\cdot V-100\,000=3\cdot V,\quad\text{ahonnan}\quad V=400\,000\ \text{Ft}.$$

A vízellátás költségeinek ismeretében $E=600\,000$ Ft, valamint $G=900\,000$ Ft.

c) A versenytárgyalás minden résztvevőjének legfeljebb 5 ismerőse lehet a tárgyalás résztvevői között. Válasszunk ki egy résztvevőt a tárgyalók közül, legyen ő A.

A skatulyaelv alapján két eset lehetséges:

I. eset: A legalább 3 másik résztvevőt ismer (például B-t, C-t és D-t).

Ha B, C és D között van kettő, akik ismerik egymást, például B és C, akkor találtunk három olyan résztvevőt, akik kölcsönösen ismerik egymást (A, B, C).

Ha B, C és D között nincs kettő, akik ismernék egymást, akkor ők kölcsönösen nem ismerik egymást.

II. eset: A legalább 3 másik résztvevőt nem ismer (például B-t, C-t és D-t).

Az I. esethez hasonló okoskodással:

Ha B, C és D között van kettő, akik nem ismerik egymást, például B és C, akkor találtunk három olyan résztvevőt, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (A, B, C).

Ha B, C és D között nincs kettő, akik nem ismernék egymást, akkor ők kölcsönösen ismerik egymást.

Tehát az előbbiek miatt mindig van három olyan résztvevő, akik kölcsönösen ismerik, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást.

7. *Tekintsük a következő,* fagráfra *vonatkozó állítást:*

Ha 5 fagráfnak összesen 41 éle van, és ezeket a fagráfokat egy gráfnak tekintjük, akkor ezen gráf pontjainak száma páros.

a) Adjuk meg az előbbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis). A választ indokoljuk. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy ha egy ötpontú egyszerű *gráfnak* 8 *éle van, akkor a gráfnak van legalább két olyan pontja, amelyből pontosan három él indul ki.* (*5 pont*)

2017. november 8-án a Fővárosi Állat- és Növénykertben kiselefánt született. A hírt először csak az állat egyik gondozója tudja.

c) Hányféleképpen juthat el a hír a többi 4 gondozóhoz, ha mindenki telefonon beszél a másikkal, és a lehető legkevesebb hívással értesül mindenki a hírről? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel egy n pontú fagráf éleinek száma $n-1$, így az 5 db fagráfnak 5-tel kevesebb éle van, mint pontja. Az előbbiek miatt az 5 db különböző, diszjunkt fagráfból álló gráf csúcsainak száma 46, tehát az állítás igaz.

b) Tekintsünk egy 5 pontú teljes gráfot, vagyis egy olyan gráfot, amelyben minden pontot minden másikkal pontosan egy él köt össze. Az előbbi gráfnak összesen 10 éle van. Töröljünk le a 10 élből kettőt, hogy 8 élünk legyen.

Elsőként bármelyik élet letörölhetjük, ekkor olyan gráfot kapunk, amelyben két pontból 3, a többi háromból 4 él indul ki.

Másodikként vagy olyan élet törlünk le, amely az egyik 3 és az egyik 4 fokszámú pontot köti össze, vagy olyat, amely két 4 fokszámú pontot köt össze.

Utóbbi esetben négy 3- és egy 4 fokszámú pont marad, míg előbbi esetben egy 2-, két 3- és két 4 fokszámú pont marad.

Látható, hogy mindegyik esetben van legalább két 3 fokszámú pont.

c) Jelölje A azt a gondozót, aki először tudja meg a hírt. Összesen 4 telefonhívás kell ahhoz, hogy mindenkihez eljusson a hír.

Ha A hívja fel mind a 4 másik gondozót, akkor 1 eset van.

Ha A csak 3 másik gondozót hív fel, és a 3 felhívott gondozó közül valamelyik hívja fel a negyediket, akkor összesen $4 \cdot 3 = 12$ eset van.

Ha A csak 2 másik gondozót hív fel, akkor a 2 felhívott gondozót $\binom{4}{2}$-féleképpen választhatja ki. A bármely 2 gondozót hívja fel, a másik 2 gondozó 8-féleképpen értesülhet a hírről, így összesen $\binom{4}{2} \cdot 8 = 48$ ilyen eset van.

Ha A csak 1 másik gondozót hív fel, akkor a 4 gondozó közül bármelyiket felhívhatja. Bármelyiküket hívja fel, a felhívott felhívhatja mind a 3 másik gondozót, ami 1 eset.

Az A által felhívott gondozó felhívhat 2 gondozót, és utána valamelyikük hívja fel a negyedik gondozót, aki még nem értesült a hírről. Ezt 6-féleképpen tehetik meg.

Az A által felhívott gondozó 1 gondozót hív fel, és ő hívja fel a többieket, ez 3 eset.

Mindenki 1 gondozót hív fel, ami $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset.

Mivel A négyféleképpen választhatja ki, hogy melyik gondozót hívja fel, ezért itt összesen $4 \cdot (1 + 6 + 3 + 6) = 64$ eset van.

Az 5 gondozó összesen 125-féleképpen értesítheti egymást.

8. *Az ábrán egy* 300 méter *hosszú egyenes alagút bejárata látható, mely egy* 8 méter *sugarú kör egy része. Az alagúton keresztülvivő autóút az alagút tetejétől* 9,5 méterre *található.*

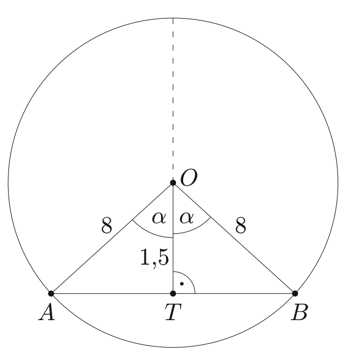
a) *Milyen széles az autóút?* (*3 pont*)

b) *Mekkora térfogatú kőzetmennyiséget kellett eltávolítani az alagút fúrása során?* (*5 pont*)

Egy túlméretes szállítmány olyan téglatest alakú tárgyat szállít, melyet a jármű 1,5 méter *magasan lévő platójára helyeznek.*

c) *Mekkora lehet legfeljebb egy olyan tárgy keresztmetszete, ami még átvihető a kétsávos alagúton szabályosan közlekedve?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az *ábra* szerint az OTB derékszögű háromszögben az TB szakasz hossza (m-ben számolva) $TB = \sqrt{8^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{61{,}75}$ (m), így az autóút kb. 15,7 m széles.



b) Az ábra szerint az OTB derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \dfrac{1{,}5}{8} = 0{,}1875$, ahonnan $\alpha \approx 79{,}2^\circ$, tehát a nagyobbik körcikk középponti szöge $360^\circ - 2\alpha \approx 201{,}6^\circ$.

Az AOB egyenlő szárú háromszög területe:

$$T_1 = \frac{8^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} \ (\approx 11{,}8\ \mathrm{m}^2).$$

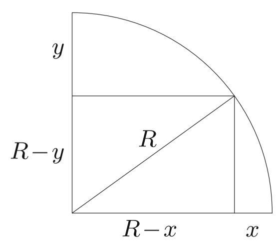
A teljes kör területe $T = 8^2\pi$ ($\approx 201{,}1\ \mathrm{m}^2$), ezért a nagyobb körcikk területe

$$T_2 = \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \cdot 8^2\pi \ (\approx 112{,}6\ \mathrm{m}^2),$$

a nagyobb körszelet területe $T_1 + T_2 \approx 124{,}4\ \mathrm{m}^2$.

Az eltávolított kőzetmennyiség kb. $300 \cdot 124,4 = 37\,320\ \mathrm{m}^3$.

c) Az *ábra* jelöléseit használva írjuk fel a téglalap alakú síkmetszet területét: $T = (R - x)(R - y)$, ugyanakkor $(R - x)^2 + (R - y)^2 = R^2$.



Az $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ egyenlőtlenség alapján $a = R - x$ és $b = R - y$ választással $\dfrac{R^2}{2} \geq T$ adódik. Egyenlőség csak $a = b$, vagyis $x = y$ esetén lesz, amikor is

$$R - x = R - y = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a maximálisan átvihető tárgy keresztmetszete egy négyzet, melynek oldala kb. $\left(4\sqrt{2} \approx \right)$5,7 méter.

9. *A gumiszerelő műhelyben a szakember tudja, hogy normál körülmények között a gépjárművek első – meghajtott – két kerekén lévő gumik* 30 000 *kilométer alatt, a hátsó gumik* 50 000 *kilométer alatt kopnak el.*

a) *Hány kilométert képes biztonságosan autózni adott gumiszettel az autós, ha az első- és hátsó tengelyen lévő kerekek egymással kicserélhetők?* (*6 pont*)

A személygépkocsikra való gumik gyártósoráról lekerülő termékeket nagyon alaposan ellenőrzik. Egy gyártósori széria jellemzően 80 000 *gumit tartalmaz, melyből általában* 400 *darab hibás (méret és/vagy anyag összetételi eltérés miatt). Az automatikus minőségellenőrzésen az ellenőrző berendezés csak a valóban hibás gumik* 99%*-át találja meg, a jó termékek* 2%*-át viszont hibásnak minősíti.*

b) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás?* (*5 pont*)

c) *Mekkora valószínűséggel képes az automatikus ellenőrző berendezés a jó minősítést megállapítani?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Ha az első tengelyen 30 000 km, a hátsón 50 000 km megtétele után kopik el a meghajtott gumi, akkor az első tengelyen a gumi $\dfrac{1}{30\,000}$-ed, a hátsó tengelyen pedig $\dfrac{1}{50\,000}$-ed része kopik el kilométerenként.

Jelölje a az első, míg b a hátsó tengelyen futott km-ek számát, ekkor mindkét gumipárra felírható az alábbi egyenlet: $\dfrac{a}{30\,000} + \dfrac{b}{50\,000} = 1$, amiből $5a + 3b = 150\,000$. Mivel az előbbi egyenlet mindkét gumipárra igaz és az egyenletes kopás miatt $a = b$, ezért $8a = 150\,000$, ahonnan $a = 18\,750$ km.

Tehát mindkét tengelyen 18 750 km-t fut a gumipár, így összesen maximum 37 500 km-t lehet velük biztonságosan megtenni.

b) és *c*)

	Jó gumi	Hibás gumi	Összesen
Jónak minősíti	$0{,}995 \cdot 0{,}98 = 0{,}9751$	$0{,}005 \cdot 0{,}01 = 0{,}00005$	0,97515
Hibásnak minősíti	$0{,}995 \cdot 0{,}02 = 0{,}0199$	$0{,}005 \cdot 0{,}99 = 0{,}00495$	0,02485
Összesen	0,995	0,005	1

A táblázat alapján annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás:

$$p = \frac{0{,}00495}{0{,}00495 + 0{,}0199} = \frac{99}{497} \approx 0{,}1992.$$

A táblázat alapján annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés a megfelelő minősítést állapítja meg: $p = 0{,}9751 + 0{,}00495 = 0{,}98005$.