I. rész

1. *Egy bolthálózat húszéves fennállása alkalmából azzal kedveskedik a vásárlóknak, hogy 20% kedvezményt kapnak vásárlásuk összegéből, ha 4 kockával dobva a dobott számok összege legalább 20.*

a) Mekkora ennek a valószínűsége?

b) Becsüljük meg, mennyibe kerül a vállalatnak ez az akció a jubileumi évben, ha 38 000 vásárlóra számítanak és a vásárlások összegszerű megoszlását az alábbi táblázatban *adták meg:*

0 – 4999 Ft	12%
5000 – 9999 Ft	36%
10 000 – 14 999 Ft	47%
15 000 – 50 000 Ft	5%

(*11 pont*)

Megoldás. *a*) Az összes esetek száma: $N_{\text{ö}} = 6^4 = 1296$.

Kedvező esetek:

$6+6+6+6=24$, $5+5+5+5=20$	$2 \cdot 1 = 2$ eset
$5+6+6+6=23$, $4+6+6+6=22$, $3+6+6+6=21$, $2+6+6+6=20$, $5+5+5+6=21$	$5 \cdot \binom{4}{1} = 5 \cdot 4 = 20$ eset
$5+5+6+6=22$, $4+4+6+6=20$	$2 \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$ eset
$4+5+6+6=21$, $4+6+5+5=20$, $3+5+6+6=20$	$3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 3 \cdot 12 = 36$ eset

$$N_{\text{k}} = 70.$$

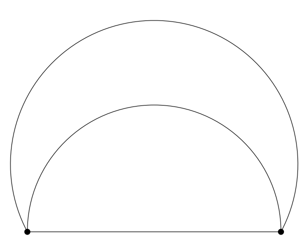
A keresett valószínűség: $p = \dfrac{N_{\text{k}}}{N_{\text{ö}}} = \dfrac{70}{1296} \approx 0{,}054$.

b) A várható 38 000 vásárló közül a kapott valószínűség szerint 2052 fog nyerni. A nyerteseket a vásárlások megoszlása szerint szétosztva, és a megadott összeghatárok középértékével számolva:

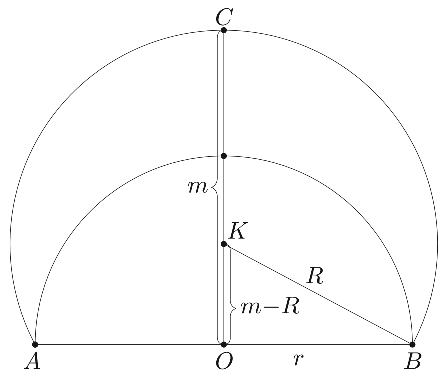
2 500 Ft	12%	246	615 000
7 500 Ft	36%	739	5 542 500
12 500 Ft	47%	964	12 050 000
32 500 Ft	5%	103	3 347 500
Összesen:	100%	2,052	21 555 000

Tehát várhatóan 21 555 000 Ft-ba fog kerülni a jubileumi akció a cégnek.

2. *Egy LED lámpát úgy alakítottak ki, hogy a LED fényforrásokat egy félgömb felületén helyezték el és azért, hogy a felülete ne legyen vakító, egy gömbszelet alakú opálos burát helyeztek fölé az* ábrának *megfelelően. A két bura falvastagsága elhanyagolható. A félgömb sugara* 15 cm, *a bura felülete pedig pont kétszerese a félgömb felszínének. A lámpákat a gyárban négyzetes oszlop alakú papírdobozokba csomagolják úgy, hogy a csillárok ne mozdulhassanak el a dobozban. Mekkorák legyenek a dobozok külső méretei, ha a rétegelt papír vastagsága $d = 5$ mm?* (*12 pont*)



Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A félgömb középpontja legyen O, sugara $r = 15$ cm, a gömbszelet középpontja K, sugara R, magassága m.



A félgömb felszíne: $A = 2\pi r^2$, a bura felszíne: $A_B = 2\pi Rm$. A feltétel szerint $A_B = 2A$, vagyis $2\pi Rm = 4\pi r^2$, amiből $Rm = 2r^2$. A BKO derékszögű háromszögben írjuk fel a Pitagorasz-tételt:

$$\begin{aligned}(m-R)^2 + r^2 &= R^2,\\ m^2 - 2mR + R^2 + r^2 &= R^2,\\ m^2 &= 2mR - r^2.\end{aligned}$$

Behelyettesítve Rm értékét: $m^2 = 3r^2$. Mivel $m > 0$, így $m = \sqrt{3}r \approx 25{,}98$ cm és

$$R = \frac{2r^2}{m} = \frac{2r^2}{\sqrt{3}r} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 17{,}32 \text{ cm}.$$

A doboz külső méretei: $a = 2(R + d) \approx 35{,}64$ cm és $m \approx 25{,}98$ cm.

3. *Egy személyautó fedélzeti számítógépe az átlagfogyasztást az előzőleg megtett* 100 km *alapján számítja. A tankban lévő üzemanyag mennyiségét is ismerve így azt is jelzi, hogy hány* km*-t tudunk még autózni a meglévő üzemanyaggal, nevezzük ezt hatótávolság. Egy alkalommal induláskor a hatótáv kijelzett értéke* 500 km. *Egyenletes sebességgel haladunk autópályán.* 50 km *megtétele után a kijelző* 588 km*-es hatótávot jelez. Ezután még* 680 km*-t teszünk meg ugyanezzel az egyenletes sebességgel, amikor az üzemanyag jelző vészvillogó kigyullad, jelezve, hogy már csak* 5 l *üzemanyagunk van. Mennyi üzemanyag volt a tankban induláskor?*

Megoldás. Legyen a tankban lévő üzemanyag induláskor x liter, az autópályán történő egyenletes haladáskor a fogyasztás y liter/km. Mivel a hatótáv induláskor 500 km, így az előzőleg megtett 100 km-en $\dfrac{x}{500}$ liter/km volt az átlagfogyasztás.

50 km megtétele után a gépkocsi $50y$ liter üzemanyag fogyasztott, ezért a tankban most $x - 50y$ liter benzin van. Az előző 100 km-en az átlagfogyasztás:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{500} + y\right).$$

Ezzel a fogyasztással számolva a tankban lévő üzemanyag még 588 km-re lenne elegendő, így

$$\frac{588}{2}\left(\frac{x}{500} + y\right) = x - 50y.$$

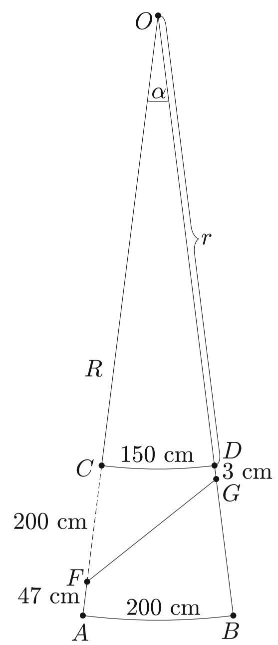
Indulástól a vészvillogó kigyulladásáig $50 + 680 = 730$ km-t tettünk meg y liter/km átlagfogyasztással, vagyis $730y$ liter üzemanyagot fogyasztottunk el, ezért $x - 730y = 5$. A második egyenletből x-et kifejezve: $x = 730y + 5$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe és rendezve:

$$\begin{aligned}294\left(\frac{730y + 5}{500} + y\right) &= 730y + 5 - 50y,\\ 723{,}24y + 2{,}94 &= 680y + 5,\\ 43{,}24y &= 2{,}06,\\ y &\approx 0{,}047\,641.\end{aligned}$$

Ezt beírva a második egyenletbe: $x \approx 39{,}78$. Tehát induláskor 39,78 liter üzemanyag volt a tankban.

4. *Egy torony csonkakúp alakú kupolája alul* 4 m, *felül* 3 m *kerületű, alkotója pedig* 2 m. *A kupola egyik oldalán egy hangya mászik fel a torony tengelyének síkjában,* 47 cm*-re van a kupola alsó szegélyétől. A vele átellenes oldalon egy másik hangya mászik felfelé ugyanabban a síkban, és már csak* 3 cm *hiányzik, hogy elérje a kupola tetejét. Ekkor a két hangya az eredeti úti célt feladva, a lehető legrövidebb úton egymás felé indul. Mekkora távolságot tesznek meg a találkozásig, ha egyenlő sebességgel haladnak?* (*14 pont*)

Megoldás. Egészítsük ki a csonkakúp palást felét körcikké. Használjuk az *ábra* jelöléseit.



Legyen $OA = OB = R$, $OC = OD = r$. Az első hangya helyét jelölje az F pont, így $AF = 47$ cm, a másodikét a G pont, így $GD = 3$ cm. $AC = BD = 200$ cm, így $R = r + 200$. Az adott kerület értékekből következik, hogy a körívek hossza: $AB = 200$ cm, $CD = 150$ cm. Az OCD és OAB körcikkek hasonlósága miatt:

$$\frac{R}{200} = \frac{r}{150}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{r+200}{200} = \frac{r}{150},$$

amiből $r = 600$ cm adódik. Számoljuk ki az α szöget:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{CD_{\text{ív}}}{2r\pi}, \quad \text{amiből} \quad \alpha = \frac{150}{2 \cdot 600\pi} \cdot 360^\circ \approx 14{,}32^\circ.$$

Az OFG háromszögben keressük az FG oldalt, $OF = r + CF = 600 + 153 = 753$ cm, $OG = r + 3 = 603$ cm. Használjuk a koszinusz-tételt:

$$FG^2 = 753^2 + 603^2 - 2 \cdot 753 \cdot 603 \cdot \cos 14{,}32^\circ.$$

Ebből $FG \approx 225{,}20$ cm. Mivel azonos sebességgel haladnak, ezért egy hangyának ennek a felét, 112,62 cm-t kell megtenni.

II. rész

5. *a*) *Oldjuk meg az alábbi egyenletet:*

$$5|x| = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\,\right).$$

b) *Határozzuk meg az* $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ *és a* $g(x) = 5|x|$ *függvények által közrezárt területrész nagyságát.* (*16 pont*)

Megoldás. $x = 0$ megoldása az egyenletnek, mert ekkor a gyökjel alatti kifejezés értéke pozitív és mindkét oldal 0. Legyen $x > 0$. Ekkor

$$5x = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\,\right).$$

A $-x^2-2x+8=0$ másodfokú egyenlet megoldásai -4 és 2. Így $-x^2-2x+8\geq 0$ akkor teljesül, ha $0<x\leq 2$. Ekkor mindkét oldalt osztva x-szel:

$$5=3x+2-2\sqrt{-x^2-2x+8},$$
$$2\sqrt{-x^2-2x+8}=3x-3.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve (ez $x\geq 1$ esetén ekvivalens átalakítás):

$$4(-x^2-2x+8)=9x^2-18x+9.$$

Rendezve:

$$0=13x^2-10x-23.$$

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1=\dfrac{23}{13}$ és $x_2=-1$.

A kezdő feltétel és a kikötés miatt az egyenlet megoldása: $x_1=\dfrac{23}{13}$.

Legyen $x<0$. Ekkor

$$-5x=x\cdot\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

A $-x^2-2x+8\geq 0$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-4\leq x<0$. Mindkét oldalt osztva x-szel:

$$-5=3x+2-2\sqrt{-x^2-2x+8},$$
$$2\sqrt{-x^2-2x+8}=3x+7.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve (ez $x\geq -\dfrac{7}{3}$ esetén ekvivalens lépés):

$$4(-x^2-2x+8)=9x^2+42x+49.$$

Rendezve:

$$0=13x^2+50x+17.$$

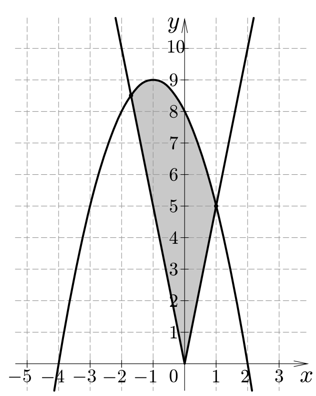
A másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_3=\frac{-25-2\sqrt{101}}{13}\approx -3{,}4692 \quad \text{és} \quad x_4=\frac{-25+2\sqrt{101}}{13}\approx -0{,}3769.$$

Mindkét megoldás megfelel a kikötéseknek.

Összegezve: Négy megoldást találtunk. Ebből három kielégíti az egyenletet.

b) Határozzuk meg a metszéspontok x koordinátáit.



$x\geq 0$ esetén $5x=-x^2-2x+8$, vagyis

$$x^2+7x-8=0.$$

A pozitív megoldás $x_1=1$.

$x<0$ esetén $-5x=-x^2-2x+8$, vagyis

$$x^2-3x-8=0.$$

A negatív megoldás $x_2\approx -1{,}7$.

A közrezárt területrész nagysága:

$$T=\int\limits_{-1,7}^{0}\big(-x^2-2x+8-(-5x)\big)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(-x^2-2x+8-5x)\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int\limits_{-1,7}^{0}(-x^2+3x+8)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\big(-x^2-7x+8\big)\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+8x\right]_{-1,7}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+8x\right]_{0}^{1}\approx 7{,}63+4{,}17=11{,}8.$$

6. *Egy üzemanyagtöltő állomás földalatti benzintároló tartálya egy fekvő hengerpalástból és a két végét lezáró két félgömbből áll. Teljes hossza* 6 m, *sugara* 1,2 m.

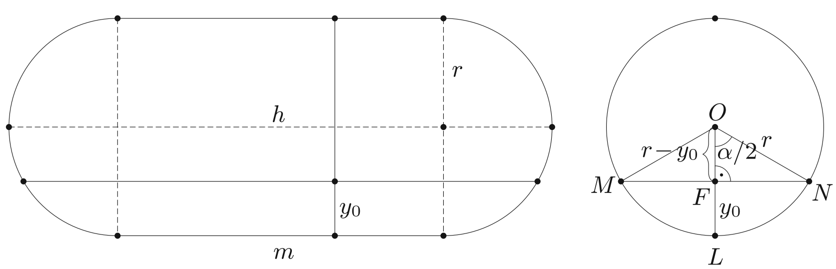
a) Mekkora a tartály térfogata?

b) Mennyi benzin van benne, ha a szintmérő úszó éppen a sugár felénél áll?

c) Egy tartálykocsiból feltöltik a tárolót. Mennyi benzint engedtek bele, ha a szintmérő 92 cm-*rel emelkedett?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Használjuk az *ábra* jelöléseit. $h=6$ m, $r=1{,}2$ m. A tartály térfogata egy henger és egy gömb térfogatának az összege. A henger magassága $m=h-2r=3{,}6$ m.

$$V=r^2\pi m+\frac{4r^3\pi}{3}=1{,}2^2\pi\cdot 3{,}6+\frac{4\cdot 1{,}2^3\pi}{3}\approx 23{,}524\ \mathrm{m}^3.$$



b) A szintmérő $y_0=\dfrac{r}{2}=0{,}6$ m magasan áll. Az OFN derékszögű háromszögben

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{r-y_0}{r}=\frac{0{,}6}{1{,}2}=\frac{1}{2},\quad\text{ezért}\quad \frac{\alpha}{2}=60^\circ,\quad \alpha=120^\circ=\frac{2\pi}{3}\ \text{rad}.$$

Az LMN körszelet területe:

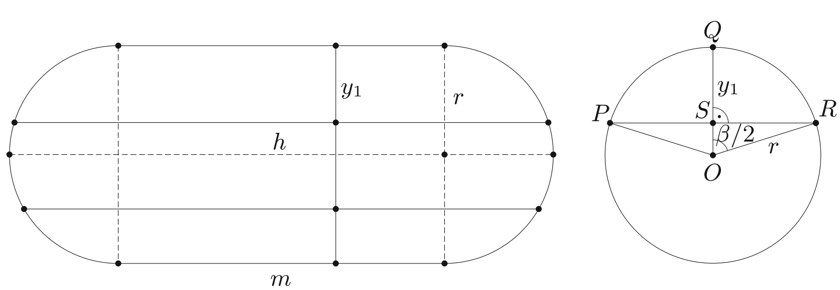
$$T_{\mathrm{sz}}=\frac{1}{2}r^2\left(\alpha_r-\sin\alpha\right)=\frac{1}{2}1{,}2^2\left(\frac{2\pi}{3}-\sin 120^\circ\right)\approx 0{,}884\,426\ \mathrm{m}^2.$$

Az üzemanyag térfogata egy gömbszelet és egy körszelet alapú hasáb térfogatának összege. A gömbszelet magassága y_0.

$$V_0=V_{\mathrm{gsz}}+V_{\mathrm{h}}=\pi r y_0^2-\frac{\pi y_0^3}{3}+T_{sz}\cdot m\approx \pi\cdot 1{,}2\cdot 0{,}6^2-\frac{\pi\cdot 0{,}6^3}{3}+0{,}884\,426\cdot 3{,}6,$$
$$V_0\approx 4{,}315\ \mathrm{m}^3.$$

Tehát $4{,}315\ \mathrm{m}^3$ benzin van a tartályban.

c) Ha a szintmérő 92 cm-t emelkedik, akkor $0{,}6+0{,}92=1{,}52$ m magasan fog állni, vagyis a tartály tetejéig még $y_1=2,4-1{,}52=0{,}88$ m távolság van. Számítsuk ki a tartályban lévő levegő térfogatát a *b*) pontban alkalmazott módszerrel és ebből már egyszerűen megkaphatjuk, mennyi benzint engedtek a tartályba.



Az ORS derékszögű háromszögben

$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{r-y_1}{r}=\frac{0{,}32}{1{,}2}=\frac{4}{15},\quad \text{ezért}\quad \frac{\alpha}{2}\approx 1{,}300\,86\ \text{rad},\quad \alpha\approx 2{,}601\,73\ \text{rad}.$$

Az LMN körszelet területe:

$$T_{\text{sz}1}=\frac{1}{2}r^2(\alpha_r-\sin\alpha_r)\approx\frac{1}{2}1{,}2^2(2{,}601\,73-\sin 2{,}601\,73)\approx 1{,}503\,15\ \text{m}^2.$$

A gömbszelet magassága y_1.

$$\begin{aligned}V_1&=V_{\text{gsz}1}+V_{\text{h}1}=\pi r y_1^2-\frac{\pi y_1^3}{3}+T_{\text{sz}1}\cdot m=\\&=\pi\cdot 1{,}2\cdot 0{,}88^2-\frac{\pi\cdot 0{,}88^3}{3}+1{,}503\,15\cdot 3{,}6\approx 7{,}617\,12\ \text{m}^3,\\V_1&\approx 7{,}617\ \text{m}^3.\end{aligned}$$

A tartályba töltött benzin mennyisége:

$$V_{\text{BE}}=V-V_0-V_1=23{,}524-4{,}315-7{,}617=11{,}592\ \text{m}^3.$$

7. *Egy ismeretlen alapú számrendszerben az $\overline{ab}_x$ kétjegyű szám és a számjegyei felcserélésével kapott $\overline{ba}_x$ kétjegyű szám között a következő összefüggések állnak fenn:*
1. $\overline{ab}_x+\overline{ba}_x=\overline{110}_x$,
2. $\overline{ab}_x-\overline{ba}_x=\overline{20}_{10}$.

a) Határozzuk meg a számrendszer alapját.

b) Az ilyen alapú számrendszerekben milyen oszthatósági szabály érvényes a 3-mal és az 5-tel való oszthatóságra?

c) Határozzuk meg a c és d számjegyek értékét úgy, hogy az $\overline{12c45d}_x$ alakú szám a lehető legnagyobb 15-tel osztható szám legyen ezekben a számrendszerekben. *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Az első egyenletben az 1-es helyiértékű számjegyeket összeadva látszik, hogy $b+a=x$, vagyis $b=x-a$. A második egyenletből:

$$ax+b-bx-a=20.$$

Ebbe beírva az első egyenletből kapott összefüggést:

$$ax+x-a-(x-a)\cdot x-a=20.$$

Rendezve:

$$\begin{aligned}2ax-2a-x^2+x&=20,\\2a(x-1)-x(x-1)&=20,\\(2a-x)(x-1)&=20.\end{aligned}$$

Ha x páros szám, akkor $(x-1)$ páratlan, $(2a-x)$ pedig páros. Ha x páratlan szám, akkor $(x-1)$ páros és $(2a-x)$ páratlan. A két szorzótényező tehát ellenkező paritású. 20 osztóit figyelembe véve 4 esetet kell megvizsgálnunk:

1. $(2a-x)(x-1)=1\cdot 20$. Ekkor $x-1=20$, vagyis $x=21$, és $2a-x=1$, vagyis $a=11$. Ez megoldás.
2. $(2a-x)(x-1)=20\cdot 1$. Ekkor $x-1=1$, vagyis $x=2$, és $2a-x=20$, vagyis $a=11$. Mivel $a>x$, ezért ez nem megoldás.
3. $(2a-x)(x-1)=4\cdot 5$. Ekkor $x-1=5$, vagyis $x=6$, és $2a-x=4$, vagyis $a=5$. Ez megoldás.
4. $(2a-x)(x-1)=5\cdot 4$. Ekkor $x-1=4$, vagyis $x=5$, és $2a-x=5$, vagyis $a=5$. Mivel $a=x$, ezért ez nem megoldás.

Tehát a számrendszer alapja $x=6$ vagy $x=21$ lehet.

b) Egy 6 vagy 21 alapú számrendszerben pontosan akkor osztható 3-mal egy szám, ha az utolsó számjegye osztható, hiszen a számrendszer alapja osztható 3-mal.

Mivel $6=5+1$ és $21=4\cdot 5+1$, ezért a 6 és 21 minden hatványa 5-tel osztva 1-et ad maradékul. Így ezekben a számrendszerekben egy szám akkor osztható 5-tel, ha számjegyeinek összege osztható 5-tel.

c) Legyen $x=6$. Ekkor az $\overline{12c45d}_6$ akkor lesz 15-tel osztható, ha 3-mal és 5-tel is osztható. 3-mal akkor osztható, ha utolsó számjegye $d=0$ vagy $d=3$.

$\overline{12c450}_6$ esetén a számjegyek összege $12+c$. Ez csak $c=3$ esetén lesz 5-tel osztható, így a szám $\overline{123450}_6$.

$\overline{12c453}_6$ esetén a számjegyek összege $15+c$. Ez csak $c=5$ esetén lesz 5-tel osztható. Ekkor a szám $\overline{125453}_6$. Ez a nagyobb szám.

Legyen $x=21$. Ekkor az $\overline{12c45d}_{21}$ utolsó számjegye lehet 18. Ekkor a számjegyek összege $30+c$. Az 5-tel való oszthatósághoz lehet $c=20$. Ez a legnagyobb számjegy a 21-es számrendszerben, így biztosan ez a feltételeknek megfelelő legnagyobb szám, tehát

$$\overline{12(20)45(18)}_{21}.$$

8. *Péter egy 5,2 millió Ft értékű új autót vásárol egy autókereskedőtől. Az összeg 40%-a az önrész, amit átvételkor ki kell fizetnie, az ár fennmaradó részét 5 év alatt törleszti, évi egyenlő részletekben 8%-os éves kamattal.*

a) Mennyi lesz Péter éves törlesztő részlete?

A kereskedő ajánlata, hogy ha 5 év múlva egy ugyanilyen értékű kocsit vesz nála, akkor ezt az autót visszavásárolja tőle, évi 10% értékcsökkenést figyelembe véve és csak az árkülönbözetet kell kifizetnie.

b) Mennyit kell fizetnie Péternek az új autóért 5 év múlva, ha elfogadja az ajánlatot?

Péter elhatározza, hogy elfogadja a kereskedő ajánlatát és előtakarékoskodik az 5 év múlva esedékes autócserére. A bank legjobb ajánlata évi 2,4%-os kamat 5 éves futamidőre havi egyenlő részletekben történő befizetéssel, havi kamatozással. (A havi kamat az éves kamat tizenketted része.)

Mekkora összeget fizessen be a bankba havonta, hogy az 5 év után kivett összegből fedezni tudja az autó cseréjét? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $5200 \cdot 0{,}6 = 3120$ eFt hitelt 8% kamattal évi x eFt-os egyenlő részletekben 5 év alatt törleszti úgy, hogy az utolsó befizetéskor a hitel lejár.

$$3120 \cdot 1{,}08^5 = x \cdot 1{,}08^4 + x \cdot 1{,}08^3 + x \cdot 1{,}08^2 + x \cdot 1{,}08^1 + x,$$

$$4584{,}3036 = x \cdot \frac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08 - 1} = 5{,}8666x,$$

$$x \approx 781{,}424 \text{ eFt.}$$

Az éves törlesztő részlet 781 424 Ft lesz.

b) 5 év múlva a 10% értékcsökkenést figyelembe véve az autó értéke $5\,200\,000 \cdot 0{,}9^5 \approx 3\,070\,548$ eFt lesz, ezért Péternek $5\,200\,000 - 3\,070\,548 = 2\,129\,452$ eFt-ot kell fizetni 5 év múlva a kereskedőnek a cseréért.

c) 5 év alatt, havi x Ft-os befizetéssel, évi 2,4%-os, vagyis havi 0,2%-os kamattal 2 129 452 Ft-ot kell összegyűjtenie.

$$x \cdot 1{,}002^{60} + x \cdot 1{,}002^{59} + \ldots + x \cdot 1{,}002^2 + x \cdot 1{,}002 = 2\,129\,452,$$

$$1{,}002 \cdot x \cdot \frac{1{,}002^{60} - 1}{1{,}002 - 1} = 2\,129\,452,$$

$$x \approx 33\,373 \text{ Ft.}$$

Tehát 33 373 Ft-ot kell havonta befizetnie, hogy 5 év múlva a kivett összegből fedezni tudja az autó cseréjét.

9. *Egy 12 pontú egyszerű gráfnak 56 éle van.*

a) Legalább hány kilencnél nagyobb fokszámú csúcsa van a gráfnak?

b) Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő.

Egy asztalitenisz csapatnak 6 férfi és 6 nő versenyzője van.

c) Az edzőnek két férfi, két női és két vegyes párost kell kiválasztania egy közelgő versenyre. Egy versenyző legfeljebb két különböző típusú párosban játszhat. Hányféle kiválasztás lehetséges?

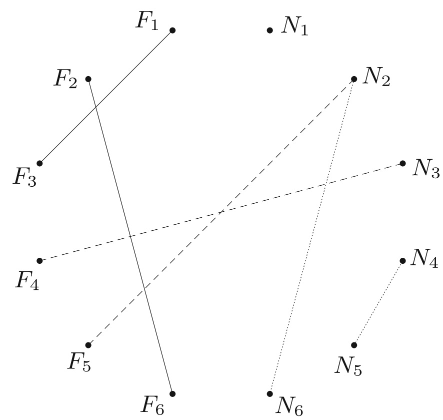
d) Mennyi az esélye annak, hogy az egyik női versenyző, Tímea, egyik párosba sem kerül be? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha minden csúcsnak 9 lenne a fokszáma, akkor a fokszámok összege $12 \cdot 9 = 108$ lenne. Az 56 él miatt a fokszámok összege 112, a különbség 4. Egy csúcs maximális fokszáma 11 lehet, tehát lehet két 11 fokszámú csúcs és 10 csúcs, aminek 9 a fokszáma. Ez megvalósítható úgy, hogy egy 12 pontú teljes gráfban két pontban minden élt meghagyunk. A maradék 10 pontot egy szabályos 10 szög csúcsainak képzelve elhagyjuk a szomszédos csúcsokat összekötő éleket. Ekkor ezek fokszáma 9-re csökken.

Tehát legalább kettő 9-nél nagyobb fokszámú csúcsa van a gráfnak.

b) A 11 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$. Mivel ennek a gráfnak 56 éle van, így a 12. pontból is indul legalább egy él, ezért a gráf összefüggő.

c) A 6 férfiversenyző közül két férfi pároshoz kell kiválasztani játékosokat, úgy, hogy egy férfi játékos nem szerepelhet mindkét párosban (*ábra*).



Ez $n_{\mathrm{F}} = \dfrac{6 \cdot 5}{2} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 90$-féleképpen lehetséges. Hasonlóan $n_{\mathrm{N}} = 90$-féleképpen lehet kiválasztani a női páros tagjait a 6 nő közül. A vegyes páros tagja bármelyik nő és bármelyik férfi lehet, mert eddig mindenki legfeljebb egy párosban szerepel. Így a két vegyes páros tagjait $n_{\mathrm{V}} = 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 = 900$-féleképpen lehet kiválasztani. Összesen tehát $n_{\text{ö}} = n_{\mathrm{F}} \cdot n_{\mathrm{N}} \cdot n_{\mathrm{V}} = 7\,290\,000$ féle kiválasztás lehetséges.

d) Ha Tímea egyik párosba sem kerül be, akkor a női párosok tagjait csak 5 nő közül választhatjuk ki, így $n_{\mathrm{N1}} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 30$. A vegyes páros tagjait 6 férfi és 5 nő közül választhatjuk, vagyis $n_{\mathrm{V1}} = 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 600$. Tehát a kedvező esetek száma: $n_{\mathrm{K}} = n_{\mathrm{F}} \cdot n_{\mathrm{N1}} \cdot n_{\mathrm{V1}} = 1\,620\,000$.

Így annak az esélye, hogy Tímea egyik párosba sem kerül be:

$$p = \frac{n_{\text{ö}}}{n_{\mathrm{K}}} = \frac{1\,620\,000}{7\,290\,000} = 0{,}2 = 20\%.$$