

I. rész

1. Egy bolthálózat húszéves fennállása alkalmából azzal kedveskedik a vásárlóknak, hogy 20% kedvezményt kapnak vásárlásuk összegéből, ha 4 kockával dobva a dobott számok összege legalább 20.

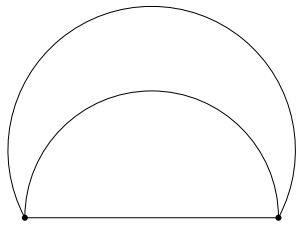
a) Mekkora ennek a valószínűsége?

b) Becsüljük meg, mennyibe kerül a vállalatnak ez az akció a jubileumi évben, ha 38 000 vásárlóra számítanak és a vásárlások összesszerű megoszlását az alábbi táblázatban adták meg:

0–4999 Ft	12%
5000–9999 Ft	36%
10 000–14 999 Ft	47%
15 000–50 000 Ft	5%

(11 pont)

2. Egy LED lámpát úgy alakítottak ki, hogy a LED fényforrásokat egy félgömb felületén helyezték el és azért, hogy a felülete ne legyen vakító, egy gömbszelet alakú opálos burát helyeztek fölé az ábrának megfelelően. A két bura falvastagsága elhanyagolható. A félgömb sugara 15 cm, a bura felülete pedig pont kétszerese a félgömb felszínének. A lámpákat a gyárban négyzetes oszlop alakú papírdobozokba csomagolják úgy, hogy a csillárok ne mozdulhassanak el a dobozban. Mekkora legyenek a dobozok külső méretei, ha a rétegelt papír vastagsága $d = 5$ mm? (12 pont)



3. Egy személyautó fedélzeti számítógépe az átlagfogyasztást az előzőleg megtett 100 km alapján számítja. A tankban lévő üzemanyag mennyiségét is ismerve így azt is jelzi, hogy hány km-t tudunk még autózni a meglévő üzemanyaggal, nevezzük ezt hatótávolságnak. Egy alkalommal induláskor a hatótáv kijelzett értéke 500 km. Egyenletes sebességgel haladunk autópályán. 50 km megtétele után a kijelző 588 km-es hatótávot jelez. Ezután még 680 km-t teszünk meg ugyanezzel az egyenletes sebességgel, amikor az üzemanyag jelző vészvillogó kigyullad, jelezve, hogy már csak 5 l üzemanyagunk van. Mennyi üzemanyag volt a tankban induláskor? (14 pont)

4. Egy torony csonkakúp alakú kupolája alul 4 m, felül 3 m kerületű, alkotója pedig 2 m. A kupola egyik oldalán egy hangya mászik fel a torony tengelyének síkjában, 47 cm-re van a kupola alsó szegélyétől. A vele átellenes oldalon egy másik hangya mászik felfelé ugyanabban a síkban, és már csak 3 cm hiányzik, hogy elérje a kupola tetejét. Ekkor a két hangya az eredeti úti célt feladva, a lehető legrövidebb úton egymás felé indul. Mekkora távolságot tesznek meg a találkozásig, ha egyenlő sebességgel haladnak? (14 pont)

II. rész

5. a) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$5|x| = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\right).$$

b) Határozzuk meg az $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ és a $g(x) = 5|x|$ függvények által közrezárt területrészt nagyságát. (16 pont)

6. Egy üzemanyag töltő állomás földalatti benzintároló tartálya egy fekvő hengerpalásból és a két végét lezáró két félgömbből áll. Teljes hossza 6 m, sugara 1,2 m.

a) Mekkora a tartály térfogata?

b) Mennyi benzint van benne, ha a szintmérő úszó éppen a sugár felénél áll?

c) Egy tartálykocsiból feltöltik a tárolót. Mennyi benzint engedtek bele, ha a szintmérő 92 cm-rel emelkedett? (16 pont)

7. Egy ismeretlen alapú számrendszerben az \overline{ab}_x kétjegyű szám és a számjegyei felcserélésével kapott \overline{ba}_x kétjegyű szám között a következő összefüggések állnak fenn:

1. $\overline{ab}_x + \overline{ba}_x = \overline{110}_x,$

2. $\overline{ab}_x - \overline{ba}_x = \overline{20}_{10}.$

- a) Határozzuk meg a számrendszer alapját.
b) Az ilyen alapú számrendszerekben milyen oszthatósági szabály érvényes a 3-mal és az 5-tel való oszthatóságra?
c) Határozzuk meg a c és d számjegyek értékét úgy, hogy az $\overline{12c45d}_x$ alakú szám a lehető legnagyobb 15-tel osztható szám legyen ezekben a számrendszerekben. (16 pont)

8. Péter egy 5,2 millió Ft értékű új autót vásárol egy autókereskedőtől. Az összeg 40%-a az önrész, amit átvételkor ki kell fizetnie, az ár fennmaradó részét 5 év alatt törleszti, évi egyenlő részletekben 8%-os éves kamattal.

a) Mennyi lesz Péter éves törlesztő részlete?

A kereskedő ajánlata, hogy ha 5 év múlva egy ugyanilyen értékű kocsit vesz nála, akkor ezt az autót visszavásárolja tőle, évi 10% értékcsökkenést figyelembe véve és csak az árkülönbözetet kell kifizetnie.

b) Mennyit kell fizetnie Péternek az új autóért 5 év múlva, ha elfogadja az ajánlatot?

Péter elhatározza, hogy elfogadja a kereskedő ajánlatát és előtakarékoskodik az 5 év múlva esedékes autócserére. A bank legjobb ajánlata évi 2,4 %-os kamat 5 éves futamidőre havi egyenlő részletekben történő befizetéssel, havi kamatozással. (A havi kamat az éves kamat tizenketted része.)

Mekkora összeget fizessen be a bankba havonta, hogy az 5 év után kivett összegből fedezni tudja az autó cseréjét? (16 pont)

9. Egy 12 pontú egyszerű gráfnak 56 éle van.

a) Legalább hány kilencnél nagyobb fokszámú csúcsa van a gráfnak?

b) Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő.

Egy asztalitenisz csapatnak 6 férfi és 6 nő versenyzője van.

c) Az edzőnek két férfi, két női és két vegyes párost kell kiválasztania egy közelgő versenyre. Egy versenyző legfeljebb két különböző típusú párosban játszhat. Hányféle kiválasztás lehetséges?

d) Mennyi az esélye annak, hogy az egyik női versenyző, Tímea, egyik párosba sem kerül be? (16 pont)