1. *Legyen ABC tetszőleges háromszög, és válasszuk az A', B' és C' pontokat egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással rendre a BC, CA és AB oldalakról. A sík Z pontja esetén jelölje $p(Z)$ annak a valószínűségét, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek által határolt háromszög tartalmazza Z-t. Határozzuk meg az ABC háromszögnek azt a Z belső pontját, amelyre $p(Z)$ a lehető legnagyobb.*

Megoldás. Legyenek Z_A, Z_B és Z_C rendre az AZ, BZ és CZ egyenesek metszéspontjai az ABC háromszög szemközti oldalával. Jelölje

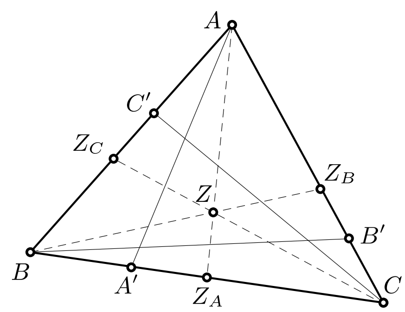
$$\alpha := \frac{BZ_A}{BC}, \quad \beta := \frac{CZ_B}{CA} \quad \text{és} \quad \gamma := \frac{AZ_C}{AB}$$

azt, hogy ezek a pontok milyen arányban osztják az egyes oldalakat. Ekkor

$$\frac{Z_AC}{BC} = \frac{BC - BZ_A}{BC} = 1 - \frac{BZ_A}{BC} = 1 - \alpha,$$

és hasonlóan

$$\frac{Z_BA}{CA} = 1 - \beta, \quad \text{illetve} \quad \frac{Z_CB}{AB} = 1 - \gamma.$$



A Ceva-tétel alapján

$$1 = \frac{BZ_A}{Z_AC} \cdot \frac{CZ_B}{Z_BA} \cdot \frac{AZ_C}{Z_CB} = \frac{BZ_A}{BC} \cdot \frac{BC}{Z_AC} \cdot \frac{CZ_B}{CA} \cdot \frac{CA}{Z_BA} \cdot \frac{AZ_C}{AB} \cdot \frac{AB}{Z_CB} = \\ = \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

adódik, azaz

(1) $$\alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma).$$

Könnyen látható, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek által határolt (esetleg elfajuló) háromszög pontosan akkor tartalmazza a Z pontot, ha vagy $BA' \leq BZ_A$ és $CB' \leq CZ_B$, valamint $AC' \leq AZ_C$ teljesül; vagy akkor, ha $BA' \geq BZ_A$, $CB' \geq CZ_B$ és $AC' \geq AZ_C$ áll fenn. Ez azt jelenti, hogy

$$p(Z) = \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 2\alpha\beta\gamma = 2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),$$

az utóbbi egyenlőségek (1) miatt teljesülnek. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \quad \text{illetve}$$
$$\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} = \sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \leq \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3}$$

következik, ahonnan

$$2\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} + \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3} = 1$$

alapján $p(Z) \leq \frac{1}{4}$ adódik. Egyenlőség pedig akkor állhat, ha mindkét számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségnél egyenlőség áll, azaz ha $\alpha = \beta = \gamma$ teljesül. Ekkor azonban (1) miatt $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, azaz Z az ABC háromszög súlypontja. Könnyen ellenőrizhető, hogy a súlypontra minden fenti becslés csakugyan egyenlőséggel teljesül. Ez pedig azt igazolja, hogy a feladat kérdésére a súlypont a válasz. $\square$

Megjegyzés. A feladat könnyen megoldható a baricentrikus koordináták segítségével. Legyenek tehát α, β, γ az Z baricentrikus koordinátái, azaz $\overrightarrow{Z} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}$, ahol $\overrightarrow{X}$ jelöli az X ponthoz tartozó helyvektort és $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ekkor a

$$p(Z) = 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

kifejezést kell maximalizálni. Márpedig a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \cdot 2\sqrt{\beta\gamma} \cdot 2\sqrt{\gamma\alpha} = 8\alpha\beta\gamma$$

adódik, ahonnan

$$p(Z) = 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} \leq 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4}$$

következik, egyenlőség pedig kizárólag $\alpha = \beta = \gamma$ esetén áll. A kérdezett valószínűség tehát $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ esetén, azaz a súlypontra maximális.

2. *Vannak-e olyan $f(x)$ és $g(x)$ valós együtthatós polinomok, amelyekre az $f(x)^3 - g(x)^2$ polinom elsőfokú?*

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy nincsenek ilyen polinomok. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy

$$f(x)^3 - g(x)^2 = ax + b, \qquad \text{ahol } a \neq 0. \tag{2}$$

Ez a formula akkor volna jól kezelhető, ha a jobb oldalon teljes négyzet ellentettje állna. Ennek érdekében bevezetjük az y változót, és alkalmazzuk az $x = \big(-y^2 - b\big)/a$ helyettesítést. Ekkor

$$f(x) = f\left(\frac{-y^2-b}{a}\right) = F\big(y^2\big), \quad \text{illetve} \quad g(x) = G\big(y^2\big)$$

teljesül alkalmas F és G polinomokra, ahonnan

$$F\big(y^2\big)^3 = G\big(y^2\big)^2 - y^2 = \big(G\big(y^2\big) - y\big) \cdot \big(G\big(y^2\big) + y\big) \tag{3}$$

adódik. A bal oldali polinom fokszáma 6-tal osztható, ezért G nem lehet konstans. Ha F konstans tagja 0, akkor ugyanez G-re is igaz. Ám ekkor a bal oldalon álló polinom legalacsonyabb fokú tagjának foka 6-tal osztható, míg a jobb oldalon álló esetében ez a fok pontosan 2. Ezért a G polinom nem konstans, de van konstans tagja. A jobb oldali két tényező relatív prím, hiszen ha egy polinom mindkettőt osztja, akkor a különbségüket és az összegüket, a $2y$ és a $2G\big(y^2\big)$ polinomokat is osztja, ám ez utóbbi polinomok relatív prímek, hisz $2G\big(y^2\big)$ konstans tagja nem nulla.

A valós együtthatós polinomok körében érvényes a számelmélet alaptétele, ezért (3) jobboldalának mindkét tényezője egy-egy valós együtthatós polinom köbének konstansszorosa. Mivel minden valós konstans előáll valós szám köbeként, azt kapjuk, hogy vannak olyan, valós együtthatós $p(y)$ és $q(y)$ polinomok, amelyekre

$$p(y)^3 = G\big(y^2\big) - y, \qquad \text{illetve} \qquad q(y)^3 = G\big(y^2\big) + y \tag{4}$$

teljesül. Láttuk, hogy G nem konstans. Ezért a (4) két jobb oldalán álló polinom legmagasabb fokú tagja megegyezik és legalább másodfokú. Ugyanez igaz tehát a két bal oldalon álló polinomra is: $p(y)$ és $q(y)$ legmagasabb fokú nemnulla tagja ugyanaz a cy^n monom, ahol $n \geq 1$. Ekkor azonban a

$$2y = q(y)^3 - p(y)^3 = \big(q(y) - p(y)\big) \cdot \big(q(y)^2 + q(y)p(y) + p(y)^2\big) \tag{5}$$

egyenlőség jobb oldalán a második tényezőben y^{2n} együtthatója $3c^2 \neq 0$, ezért a jobb oldal nem lehet elsőfokú. A kapott ellentmondás a megoldás elején kimondott állítást bizonyítja. $\square$

II. megoldás. Ismét indirekt bizonyítunk, tegyük fel tehát, hogy

$$f(x)^3 = g(x)^2 + r(x), \quad \text{ahol } r(x) = ax + b \text{ és } a \neq 0. \tag{6}$$

Nyilván sem f, sem g nem lehet konstans, ezért $\deg f = 2k$ és $\deg g = 3k$ valamilyen pozitív egész k-ra. Legyen $d = \gcd(f, g)$. Ekkor persze $d^2 \mid f^3 - g^2 = r$, ám mivel r elsőfokú, d csak konstans lehet, vagyis f és g egymáshoz relatív prímek. Most (6) mindkét oldalát deriválva az

$$3f(x)^2 f'(x) = 2g(x)g'(x) + r' \tag{7}$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan a (6) r'-szereséből kivonva a (7) r-szeresét,

$$f^2\big(fr' - 3f'r\big) = g\big(gr' - 2g'r\big)$$

adódik. A bal oldal osztható azzal az f^2 polinommal, amihez a jobb oldalon álló g relatív prím, tehát

$$f^2 \mid gr' - 2g'r. \tag{8}$$

Ekkor azonban $\deg f^2 = 4k$, míg $gr' - 2g'r$ foka legfeljebb $3k$. Ráadásul ha a g főegyütthatója d, akkor $(gr' - 2g'r)$-ben a $3k$-adfokú tag együtthatója

$$da - 6kda = (1 - 6k)da \neq 0.$$

Vagyis a $gr' - 2g'r$ polinom nem lehet a nulla polinom, és a foka pontosan $3k$.

Tehát a (8) szerint a $4k$-adfokú f^2 osztója a pontosan $3k$-adfokú, nemnulla $gr' - 2g'r$ polinomnak, ez pedig lehetetlen. □

Megjegyzések. 1. Vannak olyan nem konstans f és g polinomok, amelyekre $f^3 - g^2$ másodfokú, például $(x^2+2)^3 - (x^3+3x)^2 = 3x^2 + 8$. Igazolható, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egyrészt f és g relatív prímek, másrészt pedig ha a fokszámaik $\deg f = 2$ és $\deg g = 3$.

2. A feladat szorosan kapcsolódik az ún. abc-sejtéshez, ami az alábbit mondja ki. Minden pozitív ε-ra van olyan C_ε konstans, hogy ha a, b, c relatív prím pozitív egészek és $a + b = c$, akkor $c < C_\varepsilon \cdot \mathrm{rad}\,(abc)^{1+\varepsilon}$. Itt $\mathrm{rad}(n)$ az n *radikálját* jelöli, azaz az n különböző prímosztóinak szorzatát. (Pl. $\mathrm{rad}(2016) = 42$, $\mathrm{rad}(2017) = 2017$ és $\mathrm{rad}(2018) = 2018$.) Az abc-sejtésből számos nehéz tétel és sejtés következik. Levezethető belőle például a nagy Fermat-tételt általánosító Beal-sejtés gyengítése, miszerint az $a^n + b^m = c^k$ egyenletnek csak véges sok olyan megoldása van a pozitív egészek körében, amelyre a, b, c relatív prímek és n, m, k mindegyike legalább 3. Az abc-sejtésre jelenleg nem ismert általánosan elfogadott bizonyítás. Ígéretes fejlemény azonban Mocsizuki Sinicsi japán matematikus 2012-ben publikált 500 oldalas munkája, amelyben egy egészen új elméletet dolgoz ki és bizonyít számos számelméletet érintő sejtést, többek között az abc-sejtést. Mocsizuki elmélete azonban annyira újszerű, hogy még jelenleg is tart annak ellenőrzése. Tekintettel arra, hogy az intenzív munka ellenére még nem találtak benne lényeges hibát, könnyen elképzelhető, hogy a közeli jövőben bejelentik a sejtés megoldását. Ha pedig ez megtörténik, valószínűleg semmi sem mentheti meg a szerzőt egy igen tekintélyes matematikai díjtól, ami persze nem lehet a Fields-érem, hiszen azt 40 év felettiek nem kaphatják.

Ismert és bizonyított azonban az abc-sejtésnek egy polinomos megfelelője, az ún. Mason-tétel. Jelölje $\mathrm{rad}(f)$ az f komplex együtthatós polinom különböző irreducibilis faktorainak szorzatát. (Tehát $\mathrm{rad}(f)$ foka az f különböző komplex gyökeinek száma.) Legyenek f, g és h olyan komplex együtthatós relatív prím polinomok, amelyek nem mindegyike konstans és $f + g = h$. Ekkor a Mason-tétel szerint

$$\max\big(\deg(f), \deg(g), \deg(h)\big) \leq \deg\big(\mathrm{rad}(fgh)\big) - 1.$$

A Mason-tétel segítségével a kitűzött feladat könnyen megoldható. Tegyük fel tehát, hogy (5) teljesül. A II. megoldásban láttuk, hogy f, g relatív prímek, tehát f^3, g^2 és r is azok. Nyilván $\deg(f) = 2k$, $\deg(g) = 3k$ alkalmas k pozitív egészre. A Mason-tétel szerint ekkor

$$\begin{aligned} 6k = \max(6k, 6k, 1) &\leq \deg\big(\mathrm{rad}(f^3g^2r)\big) - 1 = \deg\big(\mathrm{rad}(fgr)\big) - 1 \leq \\ &\leq \deg(fgr) - 1 = \deg(f) + \deg(g) + \deg(r) - 1 = 5k, \end{aligned}$$

ami ellentmondás, így (5) nem teljesülhet.

3. *Egy $n \times n$-es T táblázat mezőibe egy-egy számot írtunk úgy, hogy egyik sorban sem szerepel kétszer ugyanaz a szám. Bizonyítsuk be, hogy át lehet rendezni a T-ben szereplő számokat úgy, hogy az átrendezés utáni T^* táblázat minden sorában pontosan ugyanazok a számok álljanak, mint amelyek T megfelelő sorában álltak, de T^* semelyik oszlopában se szerepeljen kétszer ugyanaz a szám.*

I. megoldás. Egy $n \times n$-es táblázat k-dik oszlopának *hibája* legyen $n - d(k)$, ahol $d(k)$ jelöli a k-dik oszlopbeli különböző számok számát. A *táblázat összhibája* pedig legyen a táblázatbeli oszlopok hibáinak összege. Azt kell igazolnunk, hogy T sorain belül lehet úgy permutálni az ott álló számokat, hogy az így kapott táblázat összhibája 0 legyen. Az alábbiakban egy olyan eljárást mutatunk, amely tetszőleges pozitív összhibájú táblázat esetén bizonyos sorok alkalmas átrendezésével csökkenti az összhibát. Mivel a szóban forgó összhiba egész szám, ezért e hibacsökkentő lépés véges sokszori alkalmazásával a táblázat összhibája 0-ra csökkenthető, és ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer.

Tegyük fel tehát, hogy T-ben – mondjuk – az első oszlop hibája pozitív. Ennek oka, hogy legalább két azonos szám (mondjuk két 1-es) szerepel benne. Mivel T minden sorában legfeljebb egy 1-es szerepel, ezért T-nek lesz olyan oszlopa, amiben nem szerepel 1-es. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a második oszlop ilyen. Egy G irányított gráfot definiálunk a T táblázat első két oszlopában előforduló számok (mint csúcsok) halmazán úgy, hogy ha valamelyik sorban az első két elem i és j (ebben a sorrendben), akkor G-be behúzunk egy i-ből j-be vezető élt.

Induljunk el az így kapott G gráf 1-es csúcsából, és haladjunk az irányított élek mentén. Két eset lehetséges. Előbb-utóbb vagy egy olyan u (nyelő) csúcsba érkezünk, ahonnan nem vezet ki él vagy egy olyan v csúcsba érünk, ahol már korábban jártunk. Mindkét esetben felcseréljük a bejárt éleknek megfelelő sorok első két elemét. Ezáltal az első esetben az első oszlopban csökken az 1-esek száma, míg a második oszlopban megjelenik egy 1-es, továbbá, a második oszlopból egy, az első oszlopban eddig nem szereplő u elem kerül át az első oszlopba. Ettől eltekintve az egyes oszlophoz tartozó számhalmazok nem változnak, tehát T összhibája 2-vel csökken. A második esetben az első két oszlophoz tartozó számhalmazok úgy változnak, hogy egy 1-es átkerül az első oszlopból a másodikba, miközben egy ettől különböző, az első oszlopban már eddig is megtalálható v szám átkerül a második oszlopból az elsőbe. Ezáltal az első oszlopban álló számok halmaza nem változik, tehát az első oszlop hibája is annyi marad amennyi volt. Emellett azonban a második oszlop hibája, és ennek megfelelően a táblázat összhibája eggyel csökken. Ezzel a hibacsökkentő lépést leírtuk, a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás. Készítsük el azt a G_T páros gráfot, amelynek egyik színosztályának $s_1, s_2, \dots, s_n$ csúcsait a T táblázat sorai, a másik színosztálybeli $a_1, a_2 \dots$ csúcsokat pedig a T-ben található számok alkotják. Az s_i és a_j csúcsok között pedig akkor fusson él G_T-ben, ha az a_j szám előfordul a T táblázat s_i sorában. Világos, hogy minden s_i csúcs G_T-beli fokszáma pontosan n, míg tetszőleges a_j csúcs fokszáma pedig legfeljebb n, hiszen egyfelől minden sorban pontosan n szám áll, másfelől pedig minden szám legfeljebb n-szer (soronként egyszer) fordul elő a T-ben. Kőnig ismert élszínezési tétele szerint tehát G_T élei kiszínezhetők az $1, 2, \dots, n$ színek felhasználásával úgy, hogy a közös végponttal rendelkező élek különböző színt kapjanak.

Ennek a színezésnek a segítségével az alábbi módon rendezzük át a T táblázat sorait. Mivel s_i-ből G_T-ben n különböző színű él indul, ezért ezen élek közül pontosan egy (mondjuk $s_i a_j$) kapta a k-dik színt. Legyen ekkor a_j a T^* táblázat v_i sorának k-dik eleme. A G_T definíciója miatt a_j szerepel a T táblázat s_i sorában, tehát az imént definiált átrendezés valóban végrehajtható a T táblázaton. Mivel a fenti T^* minden egyes oszlopában azonos színre színezett éleknek megfelelő számok állnak, ezért T^* egyetlen oszlopában sem állhat két egyforma szám. Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolunk.

Megjegyzések. 1. A feladat „hátterét” a II. megoldás mutatja: voltaképp Kőnig élszínezési tételével egyenértékű a bizonyítandó állítás. A trükk annyi, hogy a táblázat által definiált „szokásos” páros gráf helyett (aholis az oszlopok és a sorok felelnek meg a színosztályoknak, és a táblázat mezői pedig az éleknek), itt az egyik színosztályt a sorok, a másikat pedig a mezőkben álló számok alkotják, az éleket pedig az oszopok segítségével határozzuk meg. Érdemes végiggondolni, hogy mit is jelent a feladat állítása a „szokásos” értelmezés szerint. Azt kell igazolnunk, hogy bárhogy is adunk meg a $K_{n,n}$ páros gráf A színosztályának minden csúcsához n különböző színt, a gráf n^2 éle kiszínezhető úgy, hogy az azonos csúcsból induló élek színe különböző legyen és emellett minden él színe az A-beli végponthoz megadott színek közül kerüljön ki.

2. Dinitz sejtése azt mondja ki, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat mind az n^2 mezejéhez tartozik egy-egy n elemű halmaz, akkor kiválasztható ezen halmazoknak egy-egy eleme úgy, hogy azonos sorban vagy oszlopban álló mezőkhöz tartozó halmazokból ne válasszunk azonos elemet. Világos, hogy a sejtésből azonnal következik a feladat állítása, ha hozzárendeljük minden mezőhöz az adott mező sorában álló számokat. Dinitz sejtését Galvin igazolta, mégpedig abban az általánosabb formában, hogy ha egy G véges, páros gráf minden éléhez legalább akkora színlista tartozik, mint a G-beli legnagyobb fokszám, akkor minden élhez úgy választható a listájából egy-egy szín, hogy az így kapott színezésben azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja. Érdemes még megemlíteni, hogy nem páros gráfok esetén ugyanez az állítás azzal a változtatással, hogy a színlisták mérete a G gráf élkromatikus száma (ami páros gráfra Kőnig tétele szerint épp a maximális fokszám), nem más, mint az ún. listaszínezési sejtés, amire a mai napig nem ismert bizonyítás.

3. Többen próbálkoztak n szerinti teljes indukció alkalmazásával oly módon, hogy az indukciós lépésben először azt érik el, hogy az utolsó oszlop elemei különbözők legyenek, majd a bal felső $(n-1) \times (n-1)$-es táblázatra alkalmazzák az indukciós feltevést. Sajnos ebben a megközelítésben semmi sem garantálja, hogy az utolsó sor valamelyik (utolsótól különböző eleme) ne egyezzen meg egy másik elemmel ugyanabban az oszlopban. Működik azonban az n szerinti teljes indukció akkor, ha megfelelően általánosítjuk a feladat állítását: azt igazoljuk, hogy amennyiben egy $k \times n$ méretű táblázat mind a k sorában csupa különböző szám áll, továbbá egyetlen szám sem fordul elő n-nél többször a táblázatban, akkor lehetséges a sorokon belül úgy permutálni a számokat, hogy minden oszlopban csupa különböző szám álljon. Világos, hogy $n = 1$ esetén ez teljesül. Tegyük fel, hogy n-re már igazoltuk az állítást, és tekintsünk egy $k \times (n+1)$ méretű táblázatot. A célunk ekkor az, hogy az utolsó oszlopba úgy rendezzünk be különböző számokat, hogy az első n oszlopra teljesüljön az indukciós feltétel. Ehhez pedig mindössze azt kell elérni, hogy az utolsó oszlopban egyrészt csupa különböző szám álljon, másrészt pedig minden olyan szám, ami pontosan $(n+1)$-szer fordul elő a táblázatban, szerepeljen az utolsó oszlopban. A „szokásos” páros gráfot definiálva, a Hall-tételből könnyen látható, hogy egyrészt lehetséges az utolsó oszlopba csupa különböző számot becserélni, másrészt pedig lehetséges úgy permutálni a sorokat, hogy minden olyan szám, ami $(n+1)$-szer szerepel a táblázatban, az utolsó oszlopban is előforduljon. Az indukciós lépés igazolásához azonban a két tulajdonság együttes fennállása szükséges. Ezt pedig a Mendelsohn–Dulmage tétel biztosítja, amely szerint ha egy G páros gráfban M_1 és M_2 párosítások (azaz közös végpont nélküli élek halmazai), akkor van olyan M párosítás is G-ben, amely fedi az A színosztály minden M_1 által fedett csúcsát és a B színosztály minden M_2 által fedett csúcsát.

4. Érdemes végül rámutatni egy másik, a feladathoz szorosan kapcsolódó kutatási területre. A Rota-sejtés azt állítja, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat minden mezejéhez egy-egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor tartozik azzal a tulajdonsággal, hogy az egy sorban álló vektorokból bármely $\mathbb{R}^n$-beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével, akkor a táblázat sorain belül lehetséges a vektorokat úgy permutálni, hogy minden oszlopra is teljesüljön, hogy bármely $\mathbb{R}^n$-beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével az adott oszlopban álló vektorokból. A versenyen kitűzött feladat felfogható a Rota-sejtés egy igen speciális eseteként. Hasonlóan a listaszínezési sejtéshez, jelenleg az általános Rota-sejtésre sem ismert bizonyítás.