I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$4 \cdot 2^x + 5^y = 2,$$
$$8 \cdot 2^x + 3 \cdot 5^y = 5.$$

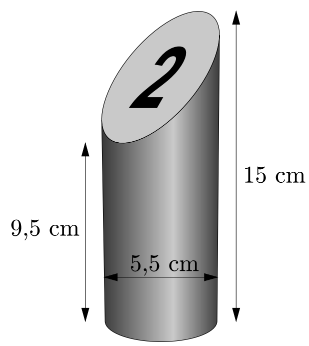
(*5 pont*)

b) Oldjuk meg a $[\pi; 2\pi]$ intervallumon az alábbi egyenletet:

$$3 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

(*5 pont*)

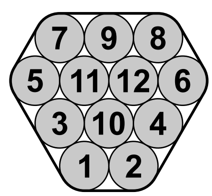
2. A *Mölkky* egy finn ügyességi játék, amit tizenkét darab fabábuval játszanak. A bábukat 5,5 cm átmérőjű, 15 cm magas egyenes körhenger alakú fából készítik úgy, hogy a henger tetejét az *1. ábrán* látható módon 45°-os szögben levágják, majd a bábuk tetejére 1–12-ig sorszámokat rajzolnak.



1. ábra

a) Mekkora egy, a játékhoz használt fabábu térfogata? (*4 pont*)

A játék kezdetén a bábukat a *2. ábrán* látható elrendezésben egy keret segítségével szorosan egymás mellé illesztik, hogy azok érintsék egymást.



2. ábra

b) Mekkora a keret kerülete? (*4 pont*)

A játék elején a játékosok egy dobófával (*Mölkky*-vel) próbálják feldönteni a keretben elhelyezkedő tizenkét számozott fabábut. A keretet a dobás előtt leveszik a bábukról. Az egymásra vagy a dobófára támaszkodó bábuk nem számítanak feldőltnek, a szabályosan feldőlt bábunak párhuzamosnak kell lennie a talajjal. Ennek következtében bármilyen kombinációban fel lehet dönteni a bábukat.

c) Hányféleképpen lehet egy dobásból három bábut feldönteni úgy, hogy a feldöntött bábukon szereplő számok szorzata négyzetszám legyen? (*5 pont*)

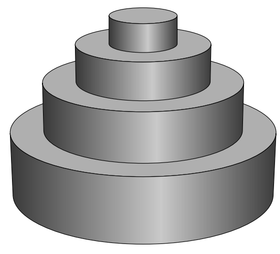
3. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben két pont: $A(1; -2)$ és $B(3; 12)$.

a) Határozzuk meg az x tengely azon P pontjának koordinátáit, melyre az ABP háromszög egyenlő szárú. (*7 pont*)

b) Számítsuk ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz. (*7 pont*)

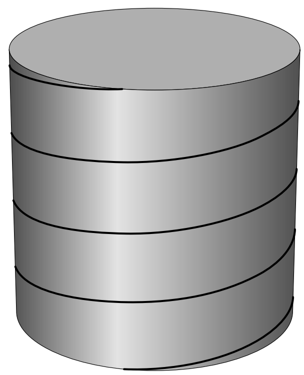
4. A *3. ábrán* egy négyemeletes, 60 cm magas esküvői torta látható, melynek szintjei különböző magasságú és sugarú egyenes hengerek. Az egyes szintek magasságainak hosszai mértani sorozatot alkotnak.

a) Milyen magasak az egyes emeletek, ha a legfelső szint 4 cm magas, és a többi szint magasságának mérőszáma is egész szám? (*9 pont*)



3. ábra

Az esküvői torta 16 cm átmérőjű, 4 cm magas legfelső szintjét a *4. ábrán* látható módon díszítéssel látják el.



4. ábra

b) Milyen hosszú a legfelső szintre tekert díszítőcsík, ha a szélességétől eltekintünk? (*5 pont*)

II. rész

5. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = 5 - 2x \quad \text{és} \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

a) Adjuk meg a $g \circ f$ függvény zérushelyeit. (*4 pont*)

b) Számítsuk ki a $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} \big(g(x) + 1\big)\,\mathrm{d}x$ határozott integrált. (*4 pont*)

c) Írjuk fel a g függvény f függvényre merőleges érintőjének egyenletét. (*8 pont*)

6. a) Egy 6 pontú fagráfban a csúcsok fokszámainak terjedelme 2, módusza 1. Hány ilyen különböző 6 pontú fagráf létezik, ha csúcsaikat nem különböztetjük meg egymástól? (*8 pont*)

b) Hány csúcsa van annak a fagráfnak, amelyben az össze nem kötött pontpárok száma kétszerese az élek számának? (*8 pont*)

7. Egy iskolai büfé italautomatájában hétféle rostos üdítő, kétféle ásványvíz és háromféle szénsavas frissítő kapható, mindegyikből pontosan 8 db.

a) Hányféle sorrendben vehet ki Emese mindegyik rostos üdítőből pontosan egyet? (*2 pont*)

b) Hányféleképpen választhat ki Emese 3 db innivalót tetszőleges összeállításban, ha az automatában lévő összes üdítőt különbözőnek tekintjük? (*5 pont*)

Az italautomaták elég gyakran elromlanak. Egy italautomatákat szervizelő cégnél 0,05 annak a valószínűsége, hogy egy adott napon nincs javítanivaló; 0,2, hogy pontosan egy; 0,6, hogy pontosan két javítanivaló automata van.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő munkanapon nincs javítanivaló? (*3 pont*)

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy három nap alatt összesen két gépet kell megjavítaniuk? (*6 pont*)

8. Egy egyetem gólyatáborában két csoport szkanderbajnokságot játszik egymással. Azért, hogy felmérjék az erőviszonyokat, először a két csoporton belül mindenki mindenkivel egyszer játszik, majd ezt követően a csoportok tagjai megmérkőznek a másik csoport tagjaival. A játék során a csoportokban összesen 144, míg a csoportok között 156 megmérettetésre kerül sor.

a) Hányan vannak az egyik, és hányan a másik csoportban? (*9 pont*)

A bajnokság megkezdése előtt minden versenyző kap egy sorszámot.

b) Botond azt állítja, hogy az egyjegyű sorszámot kapott versenyzők közül ki lehet választani hatot úgy, hogy bárhogy párosítjuk őket, a párokban szereplő versenyzők sorszámainak összege három különböző szám lesz. Igaza van-e? (*7 pont*)

9. Egy szabályos háromszög alakú céltábla oldalait n ($n > 1$, $n \in \mathbb{N}$) egyenlő részre osztottuk. Ezután az osztópontokon át a háromszög oldalaival párhuzamosan szakaszokat húztunk, melynek végpontjai a megfelelő osztópontok. Az így keletkező egybevágó szabályos kisháromszögeket balról jobbra, egyesével, felváltva feketére és fehérre színezzük úgy, hogy minden sorban az első kisháromszög fekete.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a céltáblára egyetlen lövést leadva, az fekete mezőt talál el, feltéve, hogy a lövés eltalálja a céltáblát? (*9 pont*)

b) Határozzuk meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy a kapott p valószínűségre minden $n > 1$ egész esetén teljesül, hogy $a < p \leq b$, ahol a a lehető legnagyobb, b pedig a lehető legkisebb ilyen szám? (*7 pont*)