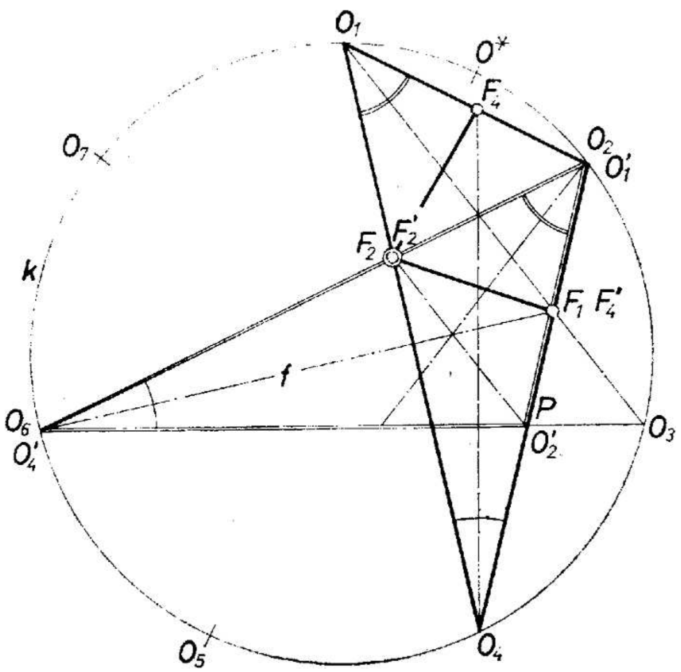
I. megoldás. A k körbe írt $O_1O_2\dots O_7$ szabályos hétszög csúcsai közül választott $O_1O_2O_4$ háromszög szögeire a kerületi szögek tétele szerint $O_4\sphericalangle : O_1\sphericalangle : O_2\sphericalangle = 1:2:4$. Jelöljük szögfelezőinek a szemben fekvő oldallal való metszéspontját rendre F_4, F_1, F_2-vel, F_2-t nyilván az O_2O_6 húr metszi ki, F_1-et pedig O_1O_3.

Mivel még $O_2O_6 = O_1O_4$, azért F_2 az $O_1O_2O_4O_6$ szimmetrikus trapéz átlóinak metszéspontja. Eszerint az $O_1O_4O_2$ háromszög elfordítható F_2 körül úgy, hogy O_1, O_4 rendre O_2, O_6-ba jusson; forduljon egyidejűleg O_2 a P pontba. $O_6O_2P\sphericalangle = O_4O_1O_2\sphericalangle = O_6O_2O_4\sphericalangle$, a forgási irányokat is beleértve, ezért P az O_2O_4 húron van, továbbá ugyanígy az O_6O_3 húron is, ezek metszéspontja.

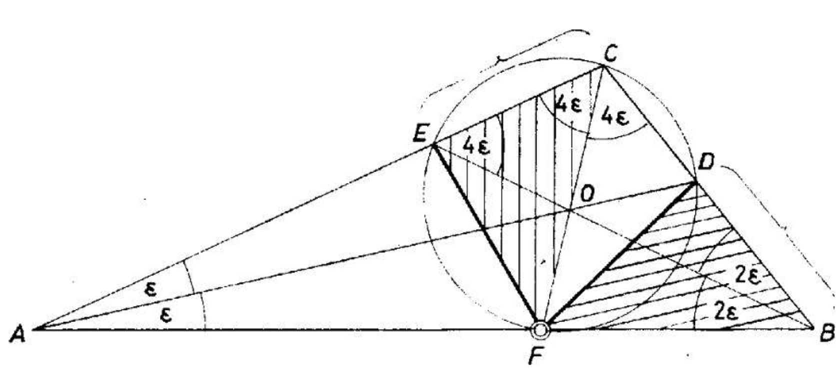


Jelöljük az X pont ilyen forgatottját X'-vel (vagyis $O_1'O_2'O_4' = O_2PO_6$), és tekintsük az F_2', F_4' pontokat. $F_2' = F_2$, helyben maradt. Az $O_6F_4' = f$ felező felezi az O_2O_3 ívet, tehát átmegy k középpontján. Így F_4' azonos F_1-gyel, egymás tükörképei f-re, hiszen F_4' a PO_2 oldalon, vagyis az O_4O_2 egyenesen van, és ez az O_1O_3 egyenes, az O_1F_1 felező képe. Eszerint $F_2F_1 = F_2'F_4' = F_2F_4$, az $F_2F_1F_4$ háromszög valóban egyenlő szárú.

Szegedy Patrik (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyenek az ABC háromszög szögei az adott aránypárok sorrendjében α, β, γ, a csúcsukból induló szögfelezők által a szemben fekvő oldalból kimetszett pontok rendre D (a BC-ből), E és F. Szemlélet és mérés szerint $FD = FE$, ezt bizonyítjuk.

Az arányt visszafelé olvasva $\gamma/2 = \beta$, tehát egyrészt a BCF háromszög egyenlő szárú: $BF = CF$, másrészt $FCA\sphericalangle = FBC\sphericalangle$; így elég lenne azt belátni, hogy az FBD háromszög ráfordítható az FCE háromszögre. A $CE = BD$ egyenlőséget bizonyítjuk, felhasználva az aránybeli és a szerkesztésbeli felezésekből eredő hasonlóságokat.



Jelöljük a szögfelezők metszéspontját O-val. Tekintsük a hasonló háromszögekből alakított alábbi párokat, alattuk zárójelben az egymás utáni szögek mértékszámai állnak, alkalmi egységnek választva az $\varepsilon = 180°/14$-et. Írjuk alájuk megfelelő oldalpárjaik arányaiból 2–2-nek az egyenlőségét, szorozzuk össze a bal, valamint a jobb oldalakat és egyszerűsítsünk:

$$BDA\,\triangle \sim COA\,\triangle \qquad CEB\,\triangle \sim OCB\,\triangle \qquad OCB\,\triangle \sim CBA\,\triangle$$

$$(4:9:1) \qquad (8:4:2) \qquad (8:4:2)$$

$$\frac{BD}{CO}=\frac{BA}{CA}, \qquad \frac{BC}{CE}=\frac{BO}{OC}, \qquad \frac{BO}{AC}=\frac{BC}{AB},$$

$$\frac{BD}{CE}=1.$$

Ezt akartuk bizonyítani, és ezzel a feladat állítását is bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A P. 336. problémában adódik, hogy speciális háromszögünkben $CDFE$ húrnégyszög.
2. Sokan trigonometriai eszközökkel bizonyították az állítást – nagyon hosszan.