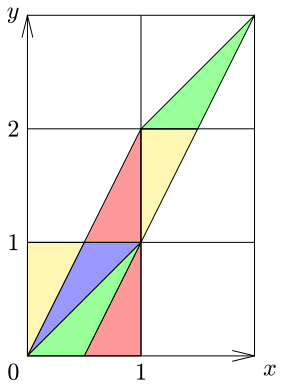
1. Bevezetés

Legyenek x_0 és y_0 a 0 és 1 közötti számok, valamint

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + y_0 \quad \mod 1, \\ y_1 &= x_0 + 2y_0 \quad \mod 1, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol a *mod 1* kifejezés törtrész vételét jelenti. Az *1. ábra* szemlélteti, hogy mi történik az egységnégyzettel, ha minden pontjára végrehajtjuk ezt a leképezést: egy irányba megnyúlik, egy másik irányba összeszűkül, majd az így kapott parallelogrammát a *mod 1* művelet visszadarabolja az egységnégyzetbe.



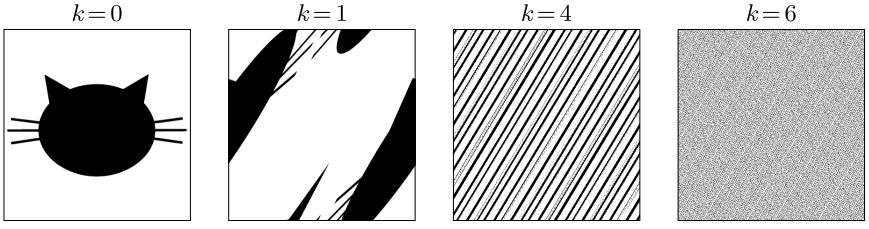
1. ábra. Az egységnégyzet képe az Arnold-féle macska-leképezés hatása alatt

Vlagyimir Arnold orosz matematikus után Arnold-féle macska-leképezésnek szokás ezt nevezni, mivel Arnold egy macska képével szemléltette a leképezés hatását. A leképezés érdekessége abból ered, hogy egyszerűsége ellenére erősen *kaotikus*. Ezalatt azt értjük, hogy ha ismételten végrehajtjuk a leképezést, az egységnégyzet pontjai gyorsan és alaposan megkeverednek. Ennek az az oka, hogy bármely pont egy irányban távolodik az eredeti „szomszédaitól" (amerre nyúlik a négyzet), egy másik irányban pedig közeledik hozzájuk (amerre szűkül a négyzet).

De hogyan is szimulálhatta Arnold ezt a leképezést? A következő eljárás a kézenfekvő: tekintsünk egy $N \times N$ pixel méretű képet, és alkalmazzuk az (1) leképezést minden pixelre. A pixelek koordinátáit legkényelmesebb egész számokban megadni, azaz a következő leképezést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + y_k \quad \mod N, \\ y_{k+1} &= x_k + 2y_k \quad \mod N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol x_k és y_k a 0 és $N-1$ közötti számok. Mivel a *mod N* kifejezés az N-nel való osztás maradékát veszi, x_{k+1} és y_{k+1} szintén 0 és $N-1$ közé esik.

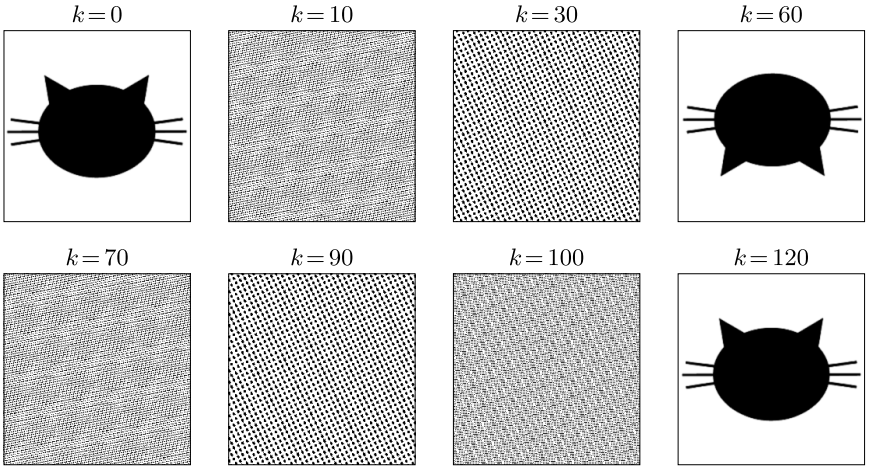


2. ábra. Macskából káoszba (k = iterációk száma, $N = 400$)

Kezdetben úgy tűnik, hogy a (2) leképezés teljesen összekeveri a képünk pontjait, ahogyan a folytonos változata is. Viszont némi számítógépes kísérletezés után meglepő módon azt tapasztaljuk, hogy kezdeti képünk előbb-utóbb újra megjelenik. De ha egy kicsit jobban belegondolunk, akkor láthatjuk, hogy maga a visszatérés ténye még nem igazán meglepő.

1. feladat. Tegyük fel, hogy a kép minden pixele csak fekete vagy fehér lehet. Mutassuk meg, hogy 2^{N^2} iteráció alatt legalább egy visszatérést tapasztalunk.

Ami viszont meglepő, hogy közel sincs szükség ilyen sok iterációra. A *3. ábrán* egy olyan esetet láthatunk, ahol kevesebb, mint $N/2$ iterációra van szükség a visszatéréshez. A következőkben áttekintünk pár egyszerűbb állítást a visszatérési időről.



3. ábra. Visszatér a macska (k = iterációk száma, $N = 241$)

2. Visszatérési idő

Visszatérési időnek fogjuk nevezni azt az iterációszámot, amelyre *először* visszatér az eredeti képünk. Pontosabban, a visszatérési idő az a legkisebb m_N szám, amelyre

$$x_{m_N} = x_0,$$
$$y_{m_N} = y_0$$

teljesül az egységnégyzet valamennyi (x_0, y_0) pontjára.

Fogalmazzuk át ezt a definíciót.

2. feladat. Lássuk be, hogy

$$\begin{aligned} x_k &= u_{2k-1}x_0 + u_{2k}y_0 \mod N, \\ y_k &= u_{2k}x_0 + u_{2k+1}y_0 \mod N, \end{aligned} \tag{3}$$

ahol u_i az i-edik Fibonacci szám (azaz $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, továbbá $u_{i+1} = u_i + u_{i-1}$, $i = 0, 1, \dots$).

Tehát a legkisebb olyan k számot keressük, amelyre

$$\begin{aligned} u_{2k-1} &\equiv 1 \mod N, \\ u_{2k} &\equiv 0 \mod N \end{aligned}$$

teljesül (azaz u_{2k-1} N-nel való osztás után 1 maradékot ad, u_{2k} pedig nullát). Ez a két feltétel elég, hiszen ezekből $u_{2k-1} \equiv 1 \mod N$ következik. Úgy is mondhatjuk, hogy a visszatérési idő egyenlő a Fibonacci számok modulo N periódusának felével. Ezt a periódust szokás Pisano-periódusnak is nevezni. Sajnos zárt formula nem ismert rá, de az idevágó ismereteink jó összefoglalását adja D. D. Wall cikke [9].

A pontos képlet hiányának ellenére léteznek eredmények, amelyek felső korlátot adnak a visszatérési időre. Ezek az állítások egyszerű számelméleti eszközökkel, ám helyenként rendkívül aprólékos munkával bizonyíthatók. Az alábbi állítást Freeman J. Dyson és Harold Falk bizonyította:

1. tétel (Dyson–Falk [5]). *Legyen $N > 2$. Ekkor a visszatérési időre fennáll az*

$$m_N \leq \frac{N^2}{2}$$

felső korlát.

Mielőtt rátérnénk a bizonyításra, megjegyezzük, hogy Freeman Dyson neves elméleti fizikus és matematikus, aki leginkább a kvantumelektrodinamika elméletének kidolgozásában vállalt szerepe miatt híres. Jelentőségét a matematikában a róla elnevezett Dyson-transzformált bizonyítja, amely az additív számelmélet egyik alapvető eszköze.

Lássuk most Dyson és Falk bizonyítását, amely a N. Vorobiev könyvében [8] leírt módszert követi.

Bizonyítás. Legyen Φ_k az u_k Fibonacci-szám N-nel való osztási maradéka. Tekintsük a

$$\langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle, \dots, \langle \Phi_k, \Phi_{k+1} \rangle, \dots \tag{4}$$

rendezett párokat. Vegyük észre, hogy $\langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Ebben a sorozatban legfeljebb N^2 különböző elem lehet, tehát bármely $N^2 + 1$ elem között szükségszerűen lesz legalább két megegyező. Most bebizonyítunk egy lemmát, hogy aztán tovább haladhassunk a tétel bizonyításával.

1. lemma. *Az első ismétlődő páros a* $\langle 0,1\rangle$.

Bizonyítás. Indirekten fogunk érvelni. Tegyük fel, hogy az első ismétlődő pár $\langle \Phi_k, \Phi_{k+1}\rangle$ valamely $k>0$ számra. Tekintsünk ekkor egy olyan $\langle \Phi_r, \Phi_{r+1}\rangle$, $r>k$ párost, amely megegyezik vele, azaz $\Phi_k=\Phi_r$ és $\Phi_{k+1}=\Phi_{r+1}$. Ekkor a Fibonacci-számok definíciója alapján

$$\begin{aligned}\Phi_{r-1} &\equiv \Phi_{r+1}-\Phi_r \mod N,\\ \Phi_{k-1} &\equiv \Phi_{k+1}-\Phi_k \mod N,\end{aligned}$$

azaz $\Phi_{r-1}=\Phi_{k-1}$. Tehát

$$\langle \Phi_{k-1}, \Phi_k\rangle = \langle \Phi_{r-1}, \Phi_r\rangle,$$

azaz $\langle \Phi_{k-1}, \Phi_k\rangle$ is ismétlődik, és korábban van a (4) sorozatban, mint $\langle \Phi_k, \Phi_{k+1}\rangle$ – ellentmondásra jutottunk. Tehát $k=0$, és így $\langle \Phi_k, \Phi_{k+1}\rangle = \langle \Phi_0, \Phi_1\rangle = \langle 0,1\rangle$. □

3. feladat. Lássuk be az előző lemma segítségével a következőt: tetszőleges N számra igaz, hogy az (u_0 utáni) első N^2 Fibonacci-szám között lesz legalább egy N-nel osztható.

2. lemma. *Legyen* $N>2$. *Ha* $u_k \equiv 0 \mod N$ *és* $u_{k+1}\equiv 1 \mod N$, *akkor* k *páros.*

Bizonyítás. Vezessük be a

$$D_k = u_k u_{k+2} - u_{k+1}^2$$

mennyiséget. $D_0=-1$, valamint $D_{k+1}=-D_k$, hiszen

$$\begin{aligned}u_{k+1}u_{k+3}-u_{k+2}^2 &= (u_{k+2}-u_k)(u_{k+1}+u_{k+2})-u_{k+2}^2 = \\ &= u_{k+2}u_{k+1}-u_k u_{k+1}-u_k u_{k+2} = \\ &= -u_k u_{k+2}+(u_{k+2}-u_k)u_{k+1} = \\ &= -u_k u_{k+2}+u_{k+1}^2.\end{aligned}$$

Tehát $D_k=-1$, ha k páros, és $D_k=1$, ha páratlan. Amennyiben $u_k\equiv 0 \mod N$ és $u_{k+1}\equiv 1 \mod N$, akkor $D_k\equiv -1 \mod N$ – így k páros. □

Innen már könnyű a tétel bizonyítása: tekintsük a $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ sorozatot. A $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{N^2+1}$ kezdőszeletben ismétlődni fog 0,1 – legyen az első ismétlődés Φ_t, Φ_{t+1}. A 2. lemma alapján t páros, a visszatérési idő definíciója szerint pedig $2m_N=t$. Azaz $m_N\le N^2/2$. □

Egy általánosabb, de kevésbé explicit képletet ad a visszatérési időre Gregory Gaspari:

2. tétel (Gaspari [6]). *Legyen* N *prímtényezős felbontása* $N=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, *ahol* p_j *prím, és* $\alpha_j\in\mathbb{N}$ *minden* $j=1,\ldots,k$ *esetében. Ekkor*

$$m_N = \mathrm{LKKT}\{m_{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, m_{p_k^{\alpha_k}}\},$$

ahol LKKT *a legkisebb közös többszöröst jelöli.*

Megemlítjük, hogy a tétel Fibonacci-számok periódusára vonatkozó megfogalmazása már szerepelt D. D. Wall jóval korábbi cikkében [9]. A Gaspari által adott bizonyítás a következő.

Bizonyítás. Kezdjük a bizonyítást egy *észrevétellel:* azt állítjuk, hogy ha K osztja N-et, akkor m_K osztja m_N-et. Mivel

$$\begin{aligned}u_{2m_N-1} &\equiv 1 \mod N,\\ u_{2m_N} &\equiv 0 \mod N,\end{aligned}$$

és K osztja N-et, azért $u_{2m_N-1}-1$ a K-val osztva is 1 maradékot ad, valamint u_{2m_N} a K-val is osztható. Azaz

$$\begin{aligned}u_{2m_N-1} &\equiv 1 \mod K,\\ u_{2m_N} &\equiv 0 \mod K.\end{aligned} \tag{5}$$

Mivel m_K a legkisebb szám, amire az (5) kongruencia-rendszer teljesül, m_K kisebb (vagy egyenlő) mint m_N. Tegyük fel, hogy m_N az m_K-val osztva nemnulla maradékot ad, azaz $m_N=qm_K+r$, ahol $0<r<m_K$, és q egész. Ekkor qm_K iteráció alatt visszatér a képünk q-szor, és mivel m_N iteráció alatt visszatér, r iteráció alatt is vissza kell térnie. De $r<m_K$, és m_K volt a legkisebb idő, ami alatt visszatér a kép, tehát ellentmondásra jutottunk. Azaz $r=0$, és ezzel beláttuk az észrevételt.

Térjünk rá a tétel bizonyítására. Tetszőleges $j\in\{1,\ldots,k\}$ esetében $p_j^{\alpha_j}$ osztja N-et, tehát az előző észrevételünk miatt $m_{p_j^{\alpha_j}}$ osztja m_N-et. Ebből következik, hogy m_N közös többszöröse az $m_{p_j^{\alpha_j}}$, $j\in\{1,\ldots,k\}$ számoknak. Legyen M egy közös többszöröse a $m_{p_j^{\alpha_j}}$, $j\in\{1,\ldots,k\}$ számoknak. Ekkor

$$\begin{aligned}u_{2M-1} &\equiv 1 \mod p_j^{\alpha_j},\\ u_{2M} &\equiv 0 \mod p_j^{\alpha_j}.\end{aligned}$$

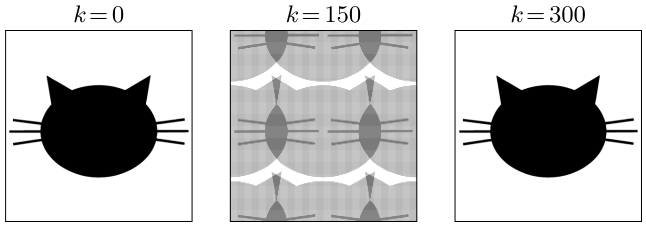
Mivel a $p_j^{\alpha_j}$ számok különböző prímek hatványaiként páronként relatív prímek,

$$\begin{aligned} u_{2M-1} &\equiv 1 \mod p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} = N, \\ u_{2M} &\equiv 0 \mod p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} = N. \end{aligned}$$

Viszont ez azt jelenti, hogy m_N osztja M-et. Mivel m_N a legkisebb egész szám, amire a fenti kongruencia teljesül, m_N a *legkisebb* közös többszöröse az $m_{p_j^{\alpha_j}}$ számoknak. □

Tehát elég prímhatványokra tudni a visszatérési időt, ebből már tetszőleges számra kiszámítható. De ez még így sem egyszerű feladat. Gaspari cikkének a függelékében $m = 1, \dots, 195$ periódusokra kigyűjtötte az összes p prímet, amelyre $m_p = m$ – ez nyújthat némi segítséget.

4. feladat. Lássuk be, hogy
a) $m_{241} = 120$ (3. ábra),
b) $m_{400} = 300$ (*4. ábra*).



4. ábra. $N = 400$, $m_N = 300$

4*. feladat. Tegyük fel, hogy m_N páros. Milyen N-ek esetében fordul elő hogy $m_N/2$ iteráció után fejtetőn jelenik meg a macska, ahogyan a 3. ábrán is látható? A 4. ábra mutatja, hogy nem mindig ez a helyzet. Itt úgynevezett szellemképek jelennek meg, a magyarázatért lásd a [3] hivatkozást.

3. Alkalmazások

Bár első ránézésre Arnold macska-leképezése csak egy matematikai játéknak tűnik, a kaotikusságát kihasználva praktikus alkalmazásai is lehetnek. A következő gyűjtés a [7] hivatkozásra támaszkodik.

A legnyilvánvalóbb egy kép vagy szöveg titkosítása: a kép pixeleire, vagy a szöveg $N \times N$-es blokkba rendezett karaktereire alkalmazzuk a macska-leképezés egy megfelelő hatványát. Így alaposan megkeverednek a képpontok (vagy a betűk), avatatlan szemlélő nem képes az eredeti üzenetet visszafejteni. Tovább bonyolítható a helyzet, ha a titkosító egy általánosabb macska-leképezést használ, például az

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + a y_k && \mod N, \\ y_{k+1} &= a x_k + (a^2+1) y_k && \mod N, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{6}$$

vagy az

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + a y_k && \mod N, \\ y_{k+1} &= b x_k + (ab+1) y_k && \mod N, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{7}$$

iterációt. Így az eredeti üzenet csakis az a, b egész számok ismeretében fejthető vissza. Ezeknek a macska-leképezéseknek a viselkedése teljesen hasonló Arnold macskájához. A visszatérési időkről J. Bao és Q. Yang ír a [2] cikkben.

Egy kicsit izgalmasabb alkalmazás a szteganográfiához köthető. A szteganográfia olyan titkos üzenetek létrehozásának tudománya, amelyek létezéséről a feladón kívül csak a címzett tud – szemben a kriptográfiával, ahol az üzenet léte nem rejtély, csak a tartalma. A két módszer együttes alkalmazása természetesen a leghatékonyabb. Tegyük fel, hogy van egy képünk, amiről később majd meg akarjuk állapítani, hogy valaki manipulálta-e. A következő a módszerünk: alkalmazzuk a képünkre a macska-leképezés k darab iterációját, majd helyezzünk rá egy kis vízjelet. Ezután $m_N - k$ iterációval állítsuk vissza az eredeti képet, amelyen a vízjel egy hétköznapi szemlélőnek láthatatlan, hiszen a pixelei alaposan szétszóródtak. Ha később meg akarjuk állapítani, hogy valaki módosította-e a képet, elég a macska-leképezés k iterációját alkalmazni rá: ha a kép nem lett manipulálva, akkor bár a kép káoszba fullad, a vízjel eredeti állapotában megjelenik a sarokban. A részletek a [4] cikkben találhatók.

Hivatkozások

[1] V.I. Arnold and A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, W.A. Benjamin, *New York* (1968).

[2] Jianghong Bao and Qigui Yang, Period of the discrete arnold cat map and general cat map, *Nonlinear Dynamics,* **70(2)** (2012), 1365–1375.

[3] Ehrhard Behrends, The ghosts of the cat, *Ergodic Theory and Dynamical Systems,* **18(2)** (1998), 321–330.

[4] Young-Long Chen, Her-Terng Yau, and Guo-Jheng Yang, A maximum entropy-based chaotic time-variant fragile watermarking scheme for image tampering detection, *Entropy,* **15(8)** (2013), 3170–3185.

[5] Freeman J. Dyson and Harold Falk, Period of a discrete cat mapping, *The American Mathematical Monthly,* **99(7)** (1992), 603–614.

[6] Gregory Gaspari, The Arnold cat map on prime lattices, *Physica D: Nonlinear Phenomena,* **73(4)** (1994), 352–372.

[7] Fredrik Svanström, Properties of a generalized Arnold's discrete cat map (2014).

[8] Nicolai N. Vorobiev, *Fibonacci numbers,* Birkhäuser (2012).

[9] D.D. Wall, Fibonacci series modulo m, *The American Mathematical Monthly,* **67(6)** (1960), 525–532.