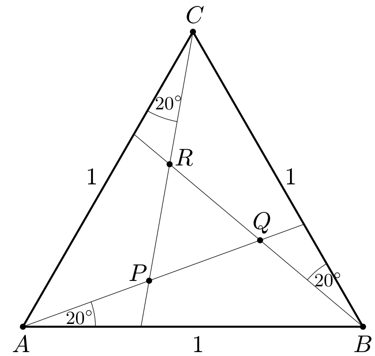
A 2017. májusi emelt szintű érettségi feladatsor egyik feladata a következő volt:

8. b) Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az *1. ábrán* látható PQR szabályos háromszöget kaptuk.



1. ábra

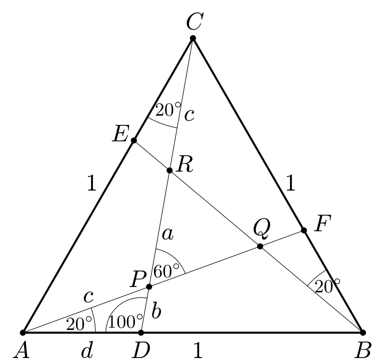
Számítsa ki a PQR háromszög oldalának hosszát!

A hivatalos javítási-értékelési útmutató három különböző megoldást közölt a feladatra, ezek megtekinthetők pl. a

https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_mat_17maj_ut.pdf

címen.

M1. Az első megoldás az ABQ háromszögben felírt két szinusztétel segítségével határozza meg a PQ oldal hosszát (*2. ábra*).



2. ábra

M2. A második megoldásban egy szinusztétel és területszámítás segítségével érünk célt. $T_{ABC} - T_{ABQ} = T_{PQR}$; és a szabályos háromszög területéből az oldalának hossza már számítható.

M3. A harmadik megoldásban szinusztételek többszöri alkalmazásával meghatározzuk a CD, majd a d, c és b szakaszhosszakat, ebből a szabályos háromszög a oldalhossza már számítható.

A javítási útmutatóban a megoldások végén a következő megjegyzés szerepel: „Addíciós tételek felhasználásával bizonyítható, hogy $a = d = 2 \cdot \sin 10°$."

Jelen cikkben egyrészt elvégezzük ezt az addíciós tételek segítségével történő bizonyítást, másrészt további elemi geometriai bizonyításokat mutatunk a szabályos háromszög oldalát meghatározó $a = d$ egyenlőségre.

Megjegyzés. **Az $a = d = 2 \cdot \sin 10°$ egyenlőség igazolása** addíciós tételek segítségével.

A bizonyításban felhasználjuk **M3.** részeredményeit:

$$d = \frac{\sin 20°}{\sin 100°} \quad \text{és} \quad a = \frac{\sin 60°}{\sin 100°} - \frac{\sin 20°}{\sin 60°} - \frac{\sin^2 20°}{\sin 60° \sin 100°};$$

valamint alkalmazzuk a $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$ helyettesítést:

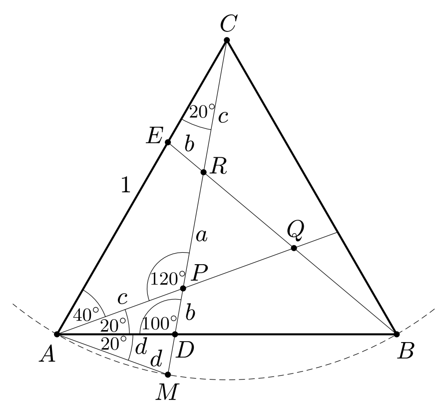
$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 2\sin 10^\circ.\\
a &= \frac{\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} =\\
&= \frac{(\sin 60^\circ + \sin 20^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} =\\
&= \frac{2\sin 40^\circ \cos 20^\circ \cdot 2\sin 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} =\\
&= \frac{\sin 80^\circ \sin 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} = \frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sin 10^\circ \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} =\\
&= 2\sin 10^\circ.
\end{aligned}
$$

Ezzel igazoltuk az $a = d = 2 \cdot \sin 10^\circ$ egyenlőséget.

M4. A CER és CDA háromszögek hasonlóak (szögeik 20°, 60°, 100°), így $\frac{b}{c} = \frac{d}{1}$, azaz $b = cd$. A CD egyenes a C középpontú egység sugarú kört M-ben metszi, $AC = CM = 1$. $AMD\sphericalangle = 80^\circ$, így az MAD háromszög egyenlő szárú, és $AM = d$. Az MAD és ACM háromszögek hasonlóak (szögeik megegyeznek, *3. ábra*), ebből $\frac{MD}{d} = \frac{d}{1}$, azaz $MD = d^2$. Az AP egyenes szögfelezője $MAC\sphericalangle$-nek, így az MAC háromszögben felírható a szögfelező-tétel:

$$\frac{d^2 + b}{a + c} = \frac{d}{1}.$$

Innen $d^2 + b = da + dc$, amiből a fent kapott $b = cd$ miatt $d^2 = da$, azaz $d = a$ következik.

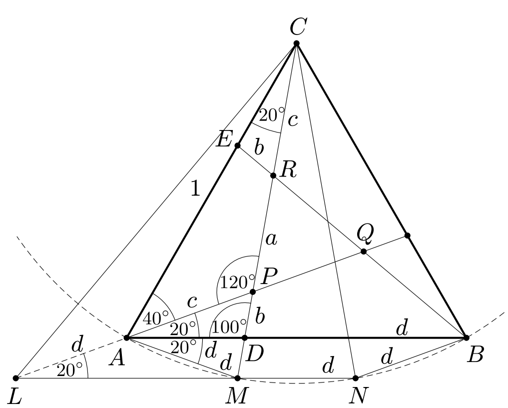


3. ábra

Megjegyzés. A $b = cd$ összefüggés az AMP háromszögben felírt szögfelező-tételből is megkapható, ha felhasználjuk az MAD és ACM háromszögek hasonlóságát:

$$\frac{DP}{PA} = \frac{b}{c} = \frac{DM}{MA} = \frac{MA}{AC} = \frac{d}{1}.$$

A következő bizonyítás előtt segédlépésként vegyük fel az egység sugarú körbe írt szabályos 18-szög oldalait. Az előző megoldás alapján $AM = MN = NB = d$ (*4. ábra*). A szabályos sokszög szimmetriatulajdonságából következik, hogy AB átlója és MN oldala párhuzamos.



4. ábra

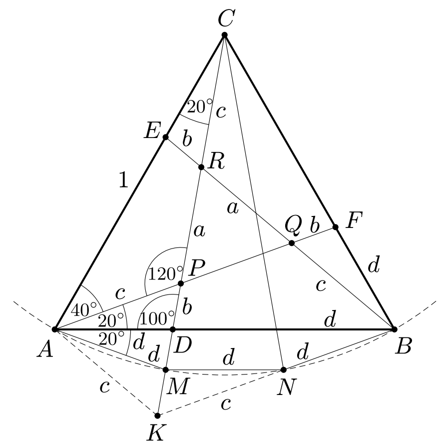
M5. Felmérjük PA-ra A-n túl $AL = d$-t, és azt fogjuk igazolni, hogy $PL = PC$.

LAM egyenlő szárú háromszög, $ALM\sphericalangle = 20°$, ezért LM és AB párhuzamosak, és az L, M, N pontok egy egyenesbe esnek. $LNBA$ egyenlő szárú trapéz ($LA = NB$) és nem húrtrapéz, ezért $LNBA$ paralelogramma, és így $LN = 1$. Az LNC háromszög egyenlő szárú,

$$NCL\sphericalangle = NLC\sphericalangle = \frac{180° - 80°}{2} = 50°.$$

Továbbá $PCL\sphericalangle = PLC\sphericalangle$ ($= 30°$), így $PL = PC$, azaz $c + d = a + c$, tehát $a = d$.

M6. Ismét szükségünk van a szabályos 18-szög oldalainak felvételére (M, N pontok). Felmérjük RP-re P-n túl $PK = c$-t, és azt fogjuk igazolni, hogy $RK = KB$ (*5. ábra*).



5. ábra

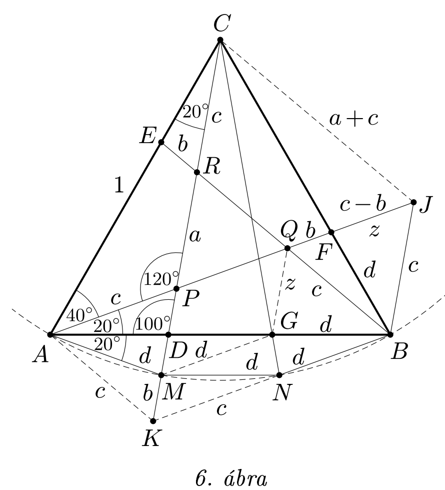
APK 60°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög, ezért $AK = c$ és AK párhuzamos EB-vel. Így

$$KAM\sphericalangle = 60° - 40° = 20°.$$

Az A és N tükrös helyzetű a KC egyenesre, ezért $KN = c$, $KNM\sphericalangle = 20°$, és így K, N, B egy egyenesre esik. KRB szabályos háromszög (pl. $KR = RB$ és bezárt szögük 60°), így $KR = KB$, $a + c = c + d$, tehát $a = d$.

Megjegyzés. Ha már megkaptuk, hogy K, N, B egy egyenesre esik, akkor a megoldás befejezésére több lehetőség is kínálkozik. Például a KRB háromszög szabályossága abból is következik, hogy szögei 60°-osak; vagy azt is megmutathatjuk, hogy $AKBQ$ paralelogramma.

M7. Felvesszük a szabályos 18-szög oldalait és az előző megoldásbeli K pontot. Jelölje AB és CN metszéspontját G (*6. ábra*). Az $MNBG$ négyszög rombusz, mivel MN és BG oldalai párhuzamosak és egyenlők, és velük azonos hosszúságú az NB oldal is. Így $NB = MG = d$, valamint NB, MG és AF párhuzamosak ($FAB\sphericalangle = ABN\sphericalangle = 20°$ váltószögek.)



6. ábra

Azt fogjuk igazolni, hogy $QGMP$ paralelogramma.

A QG szakasz hossza legyen z. Felmérjük AQ-ra Q-n túl $QJ = c$-t, így a QBJ szabályos háromszöget kapjuk ($QJ = QB$ és a közbezárt szögük 60°). A GBQ és FBJ háromszögek egybevágók, mert c és d oldalaik 40°-os szöget zárnak be, így $FJ = c - b = z$. Mivel az AKM és APD háromszögek egybevágók (megegyezik d és c oldaluk és a közbezárt szögük $20°$), így $KM = b$, azaz $MP = c - b = z$ szintén. A $QGMP$ négyszög egyenlő szárú trapéz (PQ és MG párhuzamosak, $MP = GQ$) és nem húrtrapéz, ezért paralelogramma. Így $PQ = MG$, azaz $a = d$.

Megjegyzések. 1. A megoldás során más utakat is követhetünk, bár ezek elvileg nem nagyon különböznek. Például a $QGMP$ négyszögről szögeinek kiszámításával is igazolhatjuk, hogy paralelogramma. Egy másik lehetőség: a C körüli $+60°$-os forgatás a CAP háromszöget a CBJ háromszögbe viszi, ezért CPJ szabályos háromszög. $PJ = JC = a + c$, és ekkor ráismerhetünk az $AKBQ$ és $PKBJ$ paralelogrammákra: az $AQ = a + c$, $KB = c + d$, $PJ = a + c$ szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

2. A QJB háromszög konstrukciójából és a GBQ és FBJ háromszögek egybevágóságából következik, hogy

$$GQB\sphericalangle = FJB\sphericalangle = 180° - FBJ\sphericalangle - BFJ\sphericalangle = 60°.$$

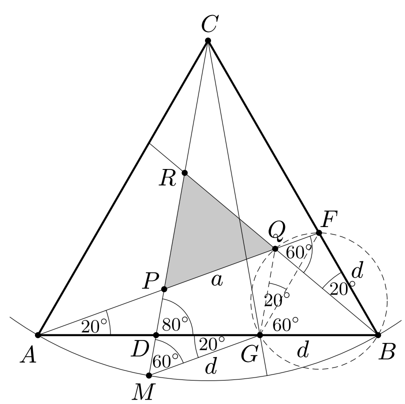
A QJB háromszög konstrukciója nélkül is igazolhatjuk a fenti 2. megjegyzésből adódó **segédállítást:** az AQB háromszögben QG szögfelező.

Bizonyítás: Q-ból párhuzamost húzunk CD-vel, ez AB-t G'-ben metszi, és QG' szögfelezője az AQB szögnek. (Azt kell megmutatnunk, hogy G és G' egybeesik.) Jelölje a szakaszok hosszát $QG' = z$, $G'D = y$, $G'B = t$. Az $AG'Q$ háromszögben $\frac{y}{d} = \frac{a}{c}$ (párhuzamos szelők tétele), a BDR háromszögben hasonlóan $\frac{y}{t} = \frac{a}{c}$. A két egyenletből következik, hogy $t = d$; azaz G' egybeesik a G szögharmadoló talpponttal.

M8. A szabályos 18-szög oldalai és G felvétele után ismét azt igazoljuk, hogy $QGMP$ paralelogramma.

A fenti segédállítás miatt (az AQB háromszögben QG szögfelező) QG és PM párhuzamosak, **M7.**-ből ismert MG és PQ párhuzamossága. $QGMP$ paralelogramma, így $PQ = MG$, azaz $a = d$.

M9. Forgassuk el a C pont körül pozitív irányban $20°$-kal az ACD háromszöget, így az MCG háromszöget kapjuk, ahol $MG = AD = d$ (*7. ábra*).



7. ábra

A forgatás szöge és iránya miatt MG és AF párhuzamosak. A $BFQG$ négyszög húrnégyszög, mert az FB szakasz Q-ból és G-ből is $60°$-os szögben látszik (Q és G ugyanabban a félsíkban vannak FB-hez képest). Tehát $QGF\sphericalangle = QBF\sphericalangle = 20°$ (kerületi szögek tétele), vagyis $QGB\sphericalangle = 80°$. Emiatt PM párhuzamos QG-vel, így a $PMGQ$ négyszögnek két párhuzamos oldalpárja van, vagyis paralelogramma. Tehát $MG = PQ$, vagyis $a = d$.

Megjegyzés. Persze ismét követhetünk más utakat is. Például ha már tudjuk, hogy a $GBFQ$ húrnégyszög, akkor ebben az $FB = d$ húrhoz $60°$-os kerületi szög tartozik, így ugyanekkora kerületi szög tartozik a $GB = d$ húrhoz is. Ezért $BQG\sphericalangle = 60°$, és $PQG\sphericalangle = 60°$ szintén. Innen pedig már következik, hogy $PMGQ$ paralelogramma.