Második nap[1]

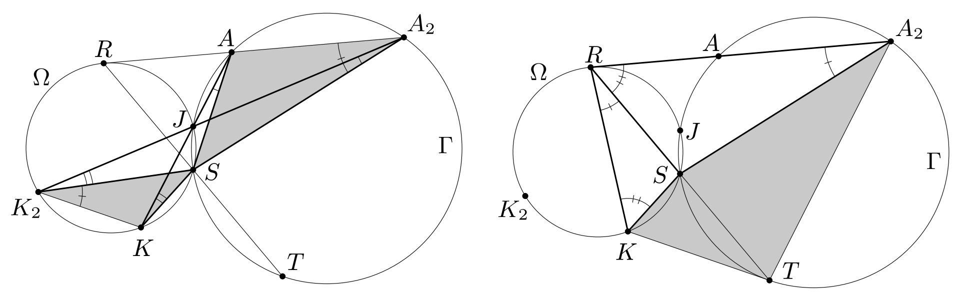
4. *Legyenek R és S különböző pontok egy Ω körön, amikre RS nem átmérője a körnek. Legyen ℓ az Ω körhöz a R pontban húzott érintőegyenes. Legyen T az a pont, amire teljesül az, hogy S az RT szakasz felezőpontja. Legyen J egy olyan pont az Ω kör rövidebb RS ívén, amire teljesül az, hogy a JST háromszög Γ körülírt köre az ℓ egyenest két különböző pontban metszi. Legyen Γ és ℓ metszéspontjai közül az A pont az, ami közelebb van az R-hez. Az AJ egyenes Ω-val vett második metszéspontja legyen K. Bizonyítsuk be, hogy a KT egyenes érintője a Γ körnek.*

Baran Zsuzsanna megoldása. Először is tegyük teljesebbé az ábrát a „másik metszéspontok” felvételével: legyen $l \cap \Gamma = \{A, A_2\}$ és legyen $A_2J \cap \Omega = \{J, K_2\}$. A megoldás során a szögeket irányítva értelmezzük.

A megoldás sok-sok hasonló háromszögpár észrevételén fog alapulni: az $SAK\triangle \sim SA_2K_2\triangle$, a $SAA_2\triangle \sim SKK_2\triangle$, a $RSK\triangle \sim A_2SR\triangle$, illetve az $SKT\triangle \sim STA_2\triangle$ hasonlóságokat fogjuk sorra belátni.

[Ezen a ponton érdemes lehet megpróbálni egyénileg befejezni a megoldást.]

$JK_2S\sphericalangle = JKS\sphericalangle$ és $SA_2J\sphericalangle = SAJ\sphericalangle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek), ezért $SAK\triangle$ és $SA_2K_2\triangle$ szögei megegyeznek, így $SAK\triangle \sim SA_2K_2\triangle$.



Ekkor $\dfrac{SA}{SA_2} = \dfrac{SK}{SK_2}$, továbbá $ASA_2\sphericalangle = KSK_2\sphericalangle$ (hiszen mindkettő $K_2SA_2\sphericalangle - K_2SA\sphericalangle = KSA\sphericalangle - K_2SA\sphericalangle$), emiatt $SAA_2\triangle \sim SKK_2\triangle$.

Ekkor $AA_2S\sphericalangle = KK_2S\sphericalangle = KRS\sphericalangle$. Az RA érinti Ω-t (és RS elválasztja A-t és K-t), ezért $ARS\sphericalangle = RKS\sphericalangle$. Így az $RSK\triangle$ és $A_2SR\triangle$ szögei megegyeznek, ezért $RSK\triangle \sim A_2SR\triangle$.

$TSK\sphericalangle = 180° - KSR\sphericalangle = 180° - RSA_2\sphericalangle = A_2ST$, továbbá

$$\frac{ST}{KS} = \frac{SR}{KS} = \frac{SA_2}{RS} = \frac{SA_2}{TS}$$

(itt kihasználtuk, hogy S az RT szakasz felezőpontja), így $SKT\triangle \sim STA_2\triangle$.

Ez utóbbi hasonlóságból következik, hogy $STK\sphericalangle = SA_2T\sphericalangle$, ami éppen azt jelenti, hogy KT érinti a Γ kört. Készen vagyunk.

Erre a feladatra sokféle megoldás elképzelhető. Két további megoldási lehetőség címszavakban:

(1) Belátjuk, hogy $AT \parallel RK$, majd pedig, hogy $ARXT$ paralelogramma, melyben S az átlók felezőpontja. Itt X a KST kör és az RK egyenes másik metszéspontja.

(2) Invertálunk R középponttal, RS sugárral. Belátjuk, hogy a KT egyenes képe és Γ képe egymás tükörképei T'-re nézve. Ehhez belátjuk, hogy $RK'SA_2'$ paralelogramma. Az RK' és $A_2'S$ párhuzamossága kijön RK és AT párhuzamosságából.

5. *Adott egy $N \geq 2$ egész szám. $N(N+1)$ futballjátékos, akik között nincs két egyenlő magasságú, valahogyan felállnak egy sorban. Az edző ki akar hagyni ebből a sorból $N(N-1)$ játékost úgy, hogy a megmaradt $2N$ játékos alkotta sor játékosaira teljesüljön az alábbi N feltétel:*

(1) *senki nem áll a legmagasabb és a második legmagasabb játékos között,*

(2) *senki nem áll a harmadik legmagasabb és a negyedik legmagasabb játékos között,*

⋮

(N) *senki nem áll a két legalacsonyabb játékos között.*

Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megtehető.

[1] Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

Borbényi Márton megoldása. Készítsünk N csoportot az alábbi módon: az első csoportban legyen a sor szerint első $N+1$ ember, a másodikban a második $N+1$ ember, és így tovább. Célunk, hogy minden csoportból pontosan 2 játékost válasszunk ki, így ők a megmaradó $2N$ embernél egymás mellé kerülnek.

A következő algoritmust alkalmazzuk:

– elkezdjük jelölgetni a játékosokat magasság szerint csökkenő sorrendben;

– amint egy csoportban van két kijelölt focista, megállunk;

– elhagyjuk ebből a csoportból a két kijelölt játékoson kívül az összes embert, és minden más csoportból a csoport legmagasabb emberét;

– a két megjelölt játékossal már nem kell foglalkoznunk, hiszen a megmaradtak között ők ketten a legmagasabbak, és senki nem áll már közöttük; marad $N-1$ csoportunk, mindegyikben N focistával;

– ismételjük a fenti eljárást az eggyel kisebb létszámú, eggyel kevesebb csoportból álló sorra stb.

6. *Egy egész számokból álló (x,y) rendezett párt* primitív rácspontnak *nevezünk, ha x és y legnagyobb közös osztója 1. Ha adott primitív rácspontok egy véges S halmaza, bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész, és vannak olyan $a_0, a_1, \dots, a_n$ egészek, hogy minden (x,y) S-beli pontra teljesül*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Williams Kada megoldása. Szeretnénk tehát egy olyan egész együtthatós nemkonstans homogén $f(x,y)$ polinomot találni, amire $f(x,y)=1$, ha $(x,y)\in S$. (Homogénnek nevezünk egy többváltozós polinomot, ha benne minden tag fokszáma egyenlő.)

Az $f(x,y)$ polinom létezését $|S|$ szerinti indukcióval igazoljuk. Ehhez felhasználjuk az ún. Bézout-lemmát, ami szerint bármely x és y egész számok legnagyobb közös osztója előállítható $ax+by$ alakban, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$. Az $|S|=1$ esetből indulunk ki: ha $S=\big\{(x,y)\big\}$, akkor a Bézout-lemma szerint alkalmas $a,b\in\mathbb{Z}$-re $f(x,y)=ax+by$ megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy az $S=\big\{(a_1,b_1),\dots,(a_m,b_m)\big\}$ halmaz minden pontján $g(x,y)=1$, és szeretnénk az (a_{m+1},b_{m+1}) elemet hozzácsatolni. A Bézout-lemma szerint $Aa_{m+1}+Bb_{m+1}=1$ alkalmas $A,B\in\mathbb{Z}$-re. Mivel a

$$h(x,y)=\prod_{i=1}^{m}(a_iy-b_ix)$$

polinom értéke minden S-beli pontban 0, azért $C,K\in\mathbb{Z}$-re az

$$f(x,y)=g(x,y)^K - C\cdot(Ax+By)^{K\cdot\deg g-m}h(x,y)$$

homogén polinom értéke minden S-beli pontban 1 (feltesszük, hogy $K\ge m$), míg

$$f(a_{m+1},b_{m+1})=g(a_{m+1},b_{m+1})^K - C\cdot\underbrace{h(a_{m+1},b_{m+1})}_{=:M}.$$

Azt állítjuk, hogy $g(a_{m+1},b_{m+1})$ és $M=h(a_{m+1},b_{m+1})$ egymáshoz relatív prím. Valóban, ha lenne közös p prímosztójuk, akkor $p\mid m$ miatt p osztója lenne az M valamelyik $a_ib_{m+1}-b_ia_{m+1}$ tényezőjének $(1\le i\le m)$. Vegyük észre, hogy ekkor a homogenitás miatt

$$\begin{aligned} b_i^{\deg g}g(a_{m+1},b_{m+1}) &= g(b_ia_{m+1},b_ib_{m+1}) \equiv g(a_ib_{m+1},b_ib_{m+1}) = \\ &= b_{m+1}^{\deg g}g(a_i,b_i) = b_{m+1}^{\deg g} \pmod p, \end{aligned}$$

s így $p\mid g(a_{m+1},b_{m+1})$-ből $p\mid b_{m+1}$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy $p\mid a_{m+1}$. Ez viszont ellentmond annak, hogy a_{m+1} és b_{m+1} relatív prím.

Ha $M\ne 0$, akkor a relatív prímség miatt $g(a_{m+1},b_{m+1})^{\varphi(|M|)}\equiv 1 \pmod M$ az Euler–Fermat-tétel szerint, így pl. $K=m\varphi\big(|M|\big)$ választással alkalmas $C\in\mathbb{Z}$-re $f(a_{m+1},b_{m+1})=1$ biztosítható. Ha pedig $M=0$, akkor a 0-hoz való relatív prímség miatt $g(a_{m+1},b_{m+1})=\pm1$, s így $K=2$ és $C=0$ megfelel.

Tehát minden esetben biztosítottuk, hogy $f(a_{m+1},b_{m+1})=1$ is teljesüljön. Tehát az indukciós lépést befejeztük, az indukció teljes.

Megjegyzés. A feladat általánosítása volt a 2017. szeptemberi számban megjelent **A. 703.** feladat. Egy további megoldási módszer olvasható a

https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A703&l=hu

címen.