[1]

A telitalálatos szelvény:

$$1, 2, 2, \quad 1, \mathrm{X}, 2, \quad \mathrm{X}, 2, 1, \quad 2, 2, 2, \quad \mathrm{X}, \mathrm{X}.$$

A legtöbb (13) találatot *Argay Zsolt* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.), *Beke Csongor* (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.), *Hervay Bence* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.), *Márton Dénes* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), *Molnár Bálint* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.), *Saár Patrik* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), *Szabó Dávid* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), és *Szabó Kristóf* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), érte el.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. Az egyenletet $3 \cdot 2^m = (n-1)(n+1)$ alakba írva, $n-1$ és $n+1$ közül az egyik egy 2-hatvány, a másik pedig egy 2-hatvány háromszorosa, ez utóbbit jelölje k. Ha $k = 3$, akkor csak $n - 1 = 1$ és $n + 1 = 3$ lehetséges, ekkor $(n, m) = (2, 0)$. Ha $k = 6$, akkor $n - 1 = 4$ és $n + 1 = 6$, vagy $n - 1 = 6$ és $n + 1 = 8$. Két újabb megoldást kaptunk: $(n, m) = (5, 3)$; $(7, 4)$. Ha $k = 3 \cdot 2^t$, ahol $t \geq 2$, akkor $3 \cdot 2^t \pm 2$ osztható 2-vel, de nem osztható 4-gyel. Mivel azonban értéke nagyobb 2-nél, így nem lehet 2-hatvány. Tehát más megoldás nincs.

2. A víz sebessége 20 centiméternyi esés után kb. 2 m/s lesz, a kifolyási sebességnél mintegy 33-szor nagyobb. Emiatt a vízsugár átmérője $\sqrt{33}$-szor kisebb, mint a csap belső átmérője, kb. 2 mm nagyságú lesz.

A d átmérőjű vízsugár akkor szakadhat szét bizonyos h távolságonként R sugarú cseppekre, ha a csepp felülete nem nagyobb, mint a „vízhenger" felülete, határesetben éppen egyenlő azzal:

$$4R^2\pi < d\pi h,$$

miközben a térfogat nem változik:

$$\frac{4R^3\pi}{3} = \frac{d^2}{4}\pi h.$$

Ebből a két egyenletből a csepp átmérőjére $2R = \frac{3}{2}d = 3$ mm adódik. Ez az érték csak nagyságrendi becslésnek tekinthető; a folyadék cseppekre szakadása meglehetősen összetett, a fentebb leírtaknál sokkal bonyolultabb probléma.

3. A Héron-képletttel: $t_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$. Mivel

$$PAU\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle,$$

ezért a trigonometrikus területképlet alapján $t_{PAU} = t_{ABC}$. Hasonlóan, $t_{RBQ} = t_{TCS} = t_{ABC}$. A kérdéses terület tehát: $t_{PQRSTU} = 15^2 + 14^2 + 13^2 + 4 \cdot 84 = 926$.

4. Az üreg (anyaghiány) úgy vehető figyelembe, mint egy negatív tömegű, kisebb gömb a tömör, homogén gömb belsejében. Minél messzebb helyezkedik el ez a negatív tömegű gömb a forgástengelytől, annál kisebb lesz az egész rendszer tehetetlenségi nyomatéka.

5. Legyen p egy megfelelő prím. Ekkor $\frac{1}{p} = 0{,}x\overline{z}$, ahol x egy r-jegyű rész, z pedig egy hétjegyű. Ekkor $\frac{10^r}{p} - x = 0{,}\overline{z}$. Ebből

$$\frac{10^r}{p} - x = \frac{z}{10^7 - 1}.$$

Rendezve: $(10^7 - 1)10^r = p\big(z + (10^7 - 1)x\big)$. Mivel p prím, ezért osztója $(10^7 - 1)$-nek vagy 10^r-nek. Könnyen látható, hogy $\frac{999\,999}{4649} = 3 \cdot 237$, tehát p értéke 2, 5, 3, 4649 vagy 239 lehet. A 2, 3, és az 5 nem jó, a 239 igen.

6. A $h = 20$ méter szintkülönbségű mozgólépcsőn összesen $n = 80$ lépcsőfok található. Ha mindegyiken két $m = 70$ kg tömegű ember áll (a gyakorlatban ez nem szokott előfordulni, de elvben elképzelhető), akkor a felszállításuk során $W = 2mghn \approx 2$ MJ munkát kell végezzen a villanymotor. A mozgólépcső sebessége hozzávetőlegesen 1 m/s, tehát $t \approx 40$ s alatt érnek fel az emberek. A szükséges teljesítmény becsült értéke: $P = W/t \approx 50$ kW. (A becslés során nem vettük figyelembe a súrlódási veszteségeket és a motor 1-nél kisebb hatásfokát, viszont a lépcsőn egyszerre elférő emberek számát és össztömegét feltehetően túlbecsültük.)

7. Helyezzük el az oldalakat az *ábra* szerint. Legyen $CP \perp OP$. Ekkor $OP = DC/2 = 7/2$. A Pitagorasz-tételt felírva az OPC és a BPC derékszögű háromszögekre:

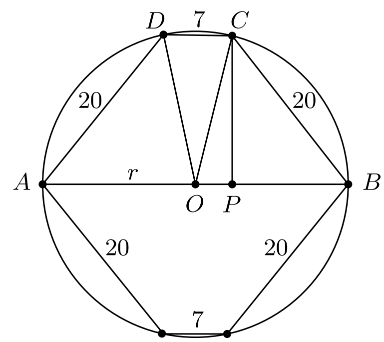
$$CP^2 = OC^2 - OP^2 \quad \text{és} \quad CP^2 = BC^2 - PB^2.$$

Felhasználva, hogy $OC = OB = r$, $OP = 7/2$, $BC = 20$ és $OB - OP = PB$, kapjuk, hogy

$$r^2 - (7/2)^2 = 20^2 - (r - 7/2)^2.$$

[1] A kérdések az 542. oldalon találhatók.

Ebből $r = 16$ adódik.



8. A gumiabroncs túlnyomásának és a talajjal érintkező gumifelületnek a szorzata megegyezik a talajra ható erővel. Ez az erő a kerékpárnál (a kerékpárost is beleszámítva) kb. tízszer-hússzor kisebb, mint egy megterhelt autó súlya, a talajjal érintkező gumifelület viszont több nagyságrenddel kisebb az autógumi megfelelő felületénél. Emiatt állíthatjuk, hogy a kerékpár tömlőjében nagyobb a nyomás, mint az autók gumiabroncsában. (Az ajánlott túlnyomások: országúti kerékpárnál kb. 6 bar, a személygépkocsik keréknyomása pedig kb. 2 bar.)

9. Jelöljük a két eredeti szám egymás utáni számjegyeit A, B, C, D, E, illetve F, G, H, K betűvel, ekkor a szóban forgó összeadások:

$$\begin{array}{lccccc} (1) & A & B & C & D & E \\ & & F & G & H & K \quad (=x) \\ \hline & 3 & 3 & 1 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lccccc} (2) & E & D & C & B & A \\ & & K & H & G & F \\ \hline & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

Mivel $x < 10^4$, azért (1)-nek tízezres oszlopa szerint A értéke 2 vagy 3. Így a (2)-nek 1-es helyi értékű oszlopa alapján $A + F = 10$, tehát F értéke 8 vagy 7, ezért (1)-nek ezres oszlopából mindenképpen van tízes átvitel a tízezresbe, éspedig 1, hiszen a $BCDE$ szám is kisebb, mint 10^4. Így $A + 1 = 3$, $A = 2$, $F = 8$.

Ugyanezzel a gondolatmenettel (2)-ből indulva E értéke 3 vagy 4, K értéke 7 vagy 6, a (2) ezres oszlopából nincs átvitel, $E = 4$, $K = 6$. Mindezeket beírva feladatunk egyszerűsödik:

$$\begin{array}{lcccl} (1') & B & C & D & \text{(tízes)} \\ & & G & H & \text{(tízes)} \\ \hline & 5 & 1 & 8 & \text{(tízes)} \end{array} \qquad \begin{array}{lcccl} (2') & D & C & B & \text{(tízes)} \\ & & H & G & \text{(tízes)} \\ \hline & 2 & 3 & 9 & \text{(tízes)} \end{array}$$

Innen B csak 4 vagy 5 lehet, emiatt $G = 9 - B$ is 4 vagy 5, tehát $(1')$-ből $C + G \geq 10$, és ezért $B = 4$, $G = 5$. Így $(2')$-ből $D = 1$ és $(1')$ alapján $H = 7$. Ekkor $(1')$ szerint C csak 6 lehet, ez a $(2')$-t is kielégíti, tehát a feladat két kiindulási száma 24 614 és 8576, a kérdéses összeg pedig 43.

10. A Földre zuhanó Hold gravitációs helyzeti energiájának megváltozása először mozgási energiává, majd hővé alakulna: $|\Delta E_{\text{grav.}}| = Q$. Felírhatjuk, hogy

$$\Delta E_{\text{grav.}} = \gamma m_{\text{Föld}} \cdot m_{\text{Hold}} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right) \approx -\gamma m_{\text{Föld}} \cdot m_{\text{Hold}}/r,$$

ahol d a Föld és a Hold jelenlegi távolsága, r pedig a két égitest átlagos távolsága az ütközés után (ez utóbbit hozzávetőlegesen a Föld sugarával közelíthetjük), másrészt $Q = c(m_{\text{Föld}} \Delta T_{\text{Föld}} + m_{\text{Hold}} \cdot \Delta T_{\text{Hold}}) \approx c \cdot m_{\text{Föld}} \cdot \Delta T_{\text{Föld}}$, hiszen a Föld tömege lényegesen nagyobb, mint a Hold tömege. A fenti összefüggésekből (ha az átlagos fajhőt nagyságrendileg pl. a vas, a nikkel vagy a gránit fajhőjével egyenlőnek tekintjük)

$$\Delta T_{\text{Föld}} \approx \frac{\gamma m_{\text{Hold}}}{c \cdot r} \approx 500 - 700 \text{ K}.$$

11. Messe a $BAC\sphericalangle = \alpha$, illetve $ABC\sphericalangle = \beta$ szög szögfelezője a szemközti oldalt A_1-ben, illetve B_1-ben, és jelöljük ezeknek az AB-re eső vetületét A_2-vel, illetve B_2-vel. Az A_1, B_1 pontnak a felezett szög másik szárára való vetülete C, ezért $A_1C = A_1A_2$, (hiszen a szögfelező pontjai ugyanakkora távolságra vannak a szög két szárától), tehát az A_1CA_2 háromszög egyenlő szárú. Így $A_1CA_2\sphericalangle = \alpha/2$, hiszen $BA_1A_2\sphericalangle = \alpha$. Hasonlóképpen $B_1CB_2\sphericalangle = \beta/2$, és így

$$A_2CB_2\sphericalangle = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 45^\circ,$$

tehát az A_2B_2 szakasz $45°$-os szögben látszik a C-ből.

12. A neutronnak *van* mágneses nyomatéka, jóllehet semleges részecske. Ennek oka, hogy a neutron töltéssel és spinnel rendelkező kvarkokból áll, amelyek még mozognak is az összetett rendszerben, tehát köráramokat képviselnek. A neutron mágneses nyomatéka a spinjével ellentétes irányú, mert – a mérések szerint – az ún. giromágneses faktora negatív: $-3{,}82$.

13. Mivel a, b, c egy-egy számrendszer alapszámát jelöli, azért mindegyikük pozitív egész, és a felhasznált számjegyek alapján $a \geq 4$, $b \geq 5$, $c \geq 10$. A számrendszer egységeit kiírva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$(a^2+1)+(2b^2+1)=(3c+9)+9,$$
$$(2a^2+3)+(4b^2+4)=(7c+7)+8.$$

A szokásos rendezés után

$$a^2+2b^2=3c+16,$$
$$2a^2+4b^2=7c+8.$$

A második egyenletből kivonva az első kétszeresét $c=24$ és $a^2+2b^2=88$ adódik.
Az egyenletből leolvashatjuk, hogy a^2 páros, tehát 4-gyel is osztható:

$$b^2=44-\frac{a^2}{2}, \qquad \text{ahol} \quad \frac{a^2}{2} \text{ páros.}$$

$b^2<44$, s mivel $b \geq 5$ és páros, így b csak 6 lehet, és akkor $a=4$.

13+1. Az R sugarú vízcseppben a felületi feszültségből származó $2\alpha/R$ görbületi nyomás növeli, a felületi töltésekre ható elektromos erő pedig csökkenti a csepp belsejében fellépő nyomást. Az elektromos húzófeszültség (negatív nyomás) nagysága $\varepsilon_0E^2/2$, ahol $E=(ne)/(4\pi\varepsilon_0R^2)$ az n elemi töltést tartalmazó vízcsepp felületénél kialakuló elektromos térerősség (az $1/2$ faktor abból ered, hogy a gömbön belül nulla a tér, azon kívül pedig E.). A cseppben a nyomás akkor egyezik meg a légköri nyomással, ha a felületi feszültségből származó és az elektromos térből származó nyomások éppen kiegyenlítik egymást:

$$\frac{2\alpha}{R}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{ne}{4\pi\varepsilon_0R^2}\right)^2.$$

Ennek megfelelően n százmilliós nagyságrendű, tehát az Avogadro-számnál lényegesen kisebb, de a néhány száznál sokkal nagyobb szám.