

## I. rész

1. a) Egy gyorsvonat két város közötti útját a menetrend szerint 80 km/h átlagsebességgel szokta megtenni. A vonat azonban egyik nap – pályafelújítási munkák miatt – az útja első egyharmadán csak 40 km/h átlagsebességet ért el. Az út második kétharmad részét a menetrend szerint előírt 80 km/h átlagsebességgel tette meg. Az út befejező egyharmad részén – hogy csökkentse a késést – gyorsított, így ezt a szakaszt 100 km/h átlagsebességgel tette meg. A célállomásra így is 12 perc késéssel érkezett. Hány km a távolság a két város között?

b) Egy vasúti jegy árát először  $p$  százalékkal felemelték, majd később  $2p$  százalékkal csökkentették. Így a jegy eredeti árához képest végül 19,5 százalékkal olcsóbb lett. Határozzuk meg  $p$  értékét. (13 pont)

**Megoldás.** a) A két város közti távolságot jelölje  $s$ . Az adatok alapján a következő egyenlet írható fel (a távolságokat km-ben, az időt órában, a sebességet km/h-ban mérjük):

$$\frac{s}{80} + 0,2 = \frac{\frac{1}{3}s}{40} + \frac{\frac{1}{3}s}{80} + \frac{\frac{1}{3}s}{100}.$$

1200-zal beszorozva az egyenletet:

$$15s + 240 = 10s + 5s + 4s,$$

ahonnan  $s = 60$ , a két város távolsága tehát 60 km.

*Ellenőrzés:* A vonat a menetrend szerinti 80 km/h átlagsebességgel 45 perc alatt teszi meg a két város közti utat. Ezen az úton az első 20 km-t (40 km/h átlagsebességgel) 30 perc, a második 20 km-t (80 km/h átlagsebességgel) 15 perc, az utolsó 20 km-t pedig (100 km/h átlagsebességgel) 12 perc alatt tette meg, így összesen valóban 12 perc késéssel (57 perc alatt) ért a célállomásra.

b) Az adatok alapján felírható egyenlet a jegy árának változására:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{2p}{100}\right) = 0,805.$$

10 000-rel beszorozva és rendezve:

$$0 = 2p^2 + 100p - 1950.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei  $p_1 = 15$  és  $p_2 = -65$ . A negatív gyök nem ad megoldást, tehát  $p = 15$ .

*Ellenőrzés:* Egy 15 százalékos emelés után egy 30 százalékos csökkentés  $1,15 \cdot 0,7 = 0,805$ -szeresére változtatja az eredeti árat, ami valóban 19,5 százalékos csökkenésnek felel meg.

2. a) Határozzuk meg az  $(x + 1)^2(2 + cx)^4$  kifejezésben  $c$  értékét, ha a műveletek elvégzésével nyert polinomban az elsőfokú tag együtthatója  $-64$ .

b) Határozzuk meg az  $A$ ,  $B$  és  $C$  kijelentések lehetséges logikai értékeit, ha tudjuk, hogy az  $(A \wedge B) \rightarrow (\neg B \vee C)$  állítás logikai értéke hamis. (13 pont)

**Megoldás.** a)  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ . Elsőfokú tagot kapunk, ha az innen kapott  $2x$ -et szorozzuk a  $(2 + cx)^4$  hatvány konstans tagjával, vagy az innen kapott  $1$ -et szorozzuk a hatvány elsőfokú tagjával.

A binomiális tétel szerint  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ , tehát

$$(2 + cx)^4 = 16 + 4 \cdot 8 \cdot cx + 6 \cdot 4 \cdot c^2x^2 + \dots$$

Ezért a szorzatban az elsőfokú tag együtthatója  $2 \cdot 16 + 1 \cdot 32c = 32 + 32c = -64$ , ahonnan  $c = -3$ .

b) A következtetés akkor és csak akkor hamis, ha az előzmény igaz és a következmény hamis. Tehát  $(A \wedge B) = i$ -nek és  $(\neg B \vee C) = h$ -nak kell egyszerre teljesülnie.

Ha  $(A \wedge B) = i$ , akkor az  $A$  és  $B$  kijelentések logikai értéke is igaz. Ha  $B = i$ , akkor  $\neg B = h$ .  $(\neg B \vee C) = h$  akkor teljesül, ha  $\neg B$  és  $C$  logikai értéke is hamis. Már láttuk, hogy  $\neg B = h$ , ezért kell, hogy  $C = h$  is teljesüljön.

A feladatban szereplő következtetés logikai értéke tehát egyetlen esetben lesz hamis:  $A = i$ ,  $B = i$ ,  $C = h$ .

3. a) Három teljes gráf közül az elsőnek 5-tel kevesebb, a másodiknak 6-tal több pontja van, mint a harmadiknak. A két kisebb pontszámú gráfnak együtt összesen annyi éle van, mint a legnagyobb pontszámúnak. Határozzuk meg a három teljes gráf pontjainak számát.

b) Egy gráfban cseresznyének nevezzük a két egymáshoz csatlakozó élből álló részgráfot. Igazoljuk, hogy egy hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma megegyezik a négypontú körök számával. (13 pont)

**Megoldás.** a) A legkisebb pontszámú gráf pontjainak számát  $k$ -val jelölve a megoldandó egyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(k+5)(k+4)}{2} &= \frac{(k+11)(k+10)}{2}, \\ (k^2 - k) + (k^2 + 9k + 20) &= k^2 + 21k + 110, \\ k^2 - 13k - 90 &= 0, \end{aligned}$$

$k = 18$  vagy  $k = -5$ . Ez utóbbi nem megoldása a feladatnak.

A három teljes gráfnak 18, 23, illetve 29 pontja van.

Ellenőrzés:  $K_{18}$ -nak 153,  $K_{23}$ -nak 253,  $K_{29}$ -nek 406 éle van, és valóban  $153 + 253 = 406$ .

b) I. megoldás. Egy cseresznye három pontját  $\binom{7}{3} = 35$ -féleképpen választhatjuk ki. A három pont közül 3-féleképpen választható ki a cseresznye csúcsa. A hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma tehát  $35 \cdot 3 = 105$ .

Egy négypontú kör pontjait  $\binom{7}{4} = 35$ -féleképpen választhatjuk ki. Négy adott pont esetén 3-féleképpen választhatjuk ki azt, hogy közülük melyik 2-2 pont legyen a körben „szemben”. A négypontú körök száma tehát  $35 \cdot 3 = 105$ .

$K_7$ -ben tehát valóban megegyezik a cseresznyék és a négypontú körök száma.

II. megoldás. Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést adunk a hétpontú teljes gráfban található cseresznyék és a négypontú körök között.

Számozzuk meg a gráf csúcsait 1-től 7-ig. Egy tetszőlegesen kiválasztott négypontú kör pontjai legyenek  $1 \leq a < b < c < d \leq 7$ , a körben nem szereplő pontok pedig  $1 \leq e < f < g \leq 7$ . Három olyan négypontú kör van, mely az  $a, b, c, d$  pontokat tartalmazza ( $abcd$ ,  $abdca$  és  $acbda$ ), és három cseresznye, mely az  $e, f, g$  pontokat tartalmazza ( $efg$ ,  $egf$  és  $gef$ ). Ezt a 3-3 kört és cseresznyét rendre feleltessük meg egymásnak.

Ezzel minden négypontú körhöz pontosan egy cseresznyét, és minden cseresznyéhez pontosan egy kört rendeltünk, tehát a négypontú körök és a cseresznyék száma valóban egyenlő.

4. Egy nyolc valós számból álló adatsor öt eleme ismert: 5; 5,5; 10; 12,5 és 15,5. A maradék három elem elveszett, de tudjuk, hogy legalább az egyik egész szám, és a három elem közül kettő egyforma volt. Azt is tudjuk, hogy a teljes adatsor átlaga 10,5, szórása pedig 3,5 volt. Határozzuk meg a hiányzó három elem értékét. (12 pont)

Megoldás. Legyen a hiányzó elemek értéke  $a$ ,  $a$  és  $b$ . Ekkor az átlag alapján  $\frac{5 + 5,5 + 10 + 12,5 + 15,5 + 2a + b}{8} = 10,5$ , ahonnan  $2a + b = 35,5$ . A szórás alapján

$$\sqrt{\frac{(5 - 10,5)^2 + (5,5 - 10,5)^2 + (10 - 10,5)^2 + (12,5 - 10,5)^2 + (15,5 - 10,5)^2 + 2(a - 10,5)^2 + (b - 10,5)^2}{8}} = \\ = \sqrt{\frac{84,5 + 2(a - 10,5)^2 + (b - 10,5)^2}{8}} = 3,5,$$

ahonnan  $2(a - 10,5)^2 + (b - 10,5)^2 = 13,5$ . ahonnan  $2(a - 10,5)^2 + (b - 10,5)^2 = 13,5$ .

Az első egyenletből  $b = (35,5 - 2a)$ -t ebbe behelyettesítve:

$$2(a - 10,5)^2 + (25 - 2a)^2 = 13,5.$$

Rendezve:

$$6a^2 - 142a + 832 = 0.$$

Ennek megoldásai:  $a_1 = 13$  és  $a_2 = \frac{32}{3}$ , melyekhez tartozó  $b$  értékek rendre  $b_1 = 9,5$  és  $b_2 = \frac{85}{6}$ .

A második esetben nem kapunk megoldást, mert a három hiányzó érték egyike sem egész szám, tehát a hiányzó három adat 13, 13 és 9,5.

Ellenőrzés: a nyolc számból álló adatsor átlaga valóban 10,5, szórása pedig valóban 3,5.

## II. rész

5. a) Egy háromszög egyik oldala 7 cm hosszú, az egyik ezen fekvő szög 18 fokos, az oldallal szemközti szög pedig 108 fokos. Határozzuk meg a háromszög területét és a háromszögbe írható kör sugarát.

b) Egy vízszintes terepen álló torony talppontját megközelíteni nem tudjuk. A torony magasságára árnyékának hosszából szeretnénk következtetni, de a torony megközelíthetlensége miatt az árnyék pontos hosszát sem tudjuk megmérni.

Ezért megjelöljük a torony árnyékának végpontját akkor, amikor a Nap sugarai  $75^\circ$ -os szögben érik a talajt. Néhány órával később, amikor a Nap sugarai már csak  $60^\circ$ -os szögben érik a talajt, a torony árnyékát ennél 8 méterrel hosszabbnak találjuk.

Milyen magas a torony?

(16 pont)

**Megoldás.** a) Jelölje a háromszög 18 fokos szöggel szemközti oldalát  $a$ , az 54 fokos szöggel szemközti oldalát pedig  $b$ . A háromszög ismeretlen oldalainak hosszát szinusztétellel határozzuk meg:

$$\frac{a}{7} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 108^\circ}, \quad \text{ahonnan} \quad a \approx 2,27 \text{ cm},$$

$$\frac{b}{7} = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 108^\circ}, \quad \text{ahonnan} \quad b \approx 5,95 \text{ cm}.$$

A háromszög területe:

$$T = \frac{7 \cdot a \cdot \sin 54^\circ}{2} \approx 6,44 \text{ cm}^2$$

( $a$  két tizedesjegyre kerekített értékével számolva  $6,43 \text{ cm}^2$ ).

A beírható kör  $r$  sugara a  $T = rs$  képlet segítségével határozható meg, ahol  $s = \frac{K}{2} \approx 7,61 \text{ cm}$ . Innen  $r = \frac{T}{s} \approx 0,85 \text{ cm}$ .

b) Jelölje a torony magasságát  $h$ , árnyékának hosszát az első mérés alkalmával  $x$ .

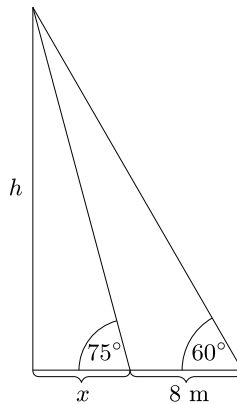
$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{h}{x} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x+8},$$

$$h = \operatorname{tg} 75^\circ \cdot x = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot (x+8).$$

Ebből (kihasználva, hogy  $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ),

$$x = \frac{8 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ} (= 4\sqrt{3}) \approx 6,9 \text{ méter},$$

majd  $h = \operatorname{tg} 75^\circ \cdot x (= 12 + 8\sqrt{3}) \approx 25,9 \text{ méter}$ .



*Másképp:*

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ}, \quad \text{majd ezzel} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ} + 8}.$$

Ebből

$$h = \frac{8 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 75^\circ}} (= 12 + 8\sqrt{3}) \approx 25,9 \text{ méter}.$$

**6. Öt osztálytárs: Anna, Balázs, Cili, Dénes és Elemér négynapos közös nyaralásra mennek. Mind a négy napon sorsolással választják ki maguk közül azt az egy embert, akinek aznap reggel be kell vásárolnia (egy-egy emberre akár többször is sor kerülhet).**

- Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon más-más ember megy bevásárolni?
- Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon ugyanannak az embernek kell vásárolnia?
- Mekkora annak a valószínűsége, hogy Annát a négy nap alatt legalább kétszer kisorsolják?
- Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nyaralás során két ember intézi mind a négy bevásárlást (mindkettőre legalább egyszer sor kerül)? (16 pont)

**Megoldás.** a) A kért valószínűséget a kedvező esetek és az összes eset számának hányadosaként kapjuk:

$$p = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5^4} = 0,192.$$

b) Annak a valószínűsége, hogy pl. Annát sorsolják ki mind a négy napon,  $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ . Mivel bármelyik osztálytárs esetén ugyanennyi ez a valószínűség, és ezek egymást kizáró események, ezért

$$p = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{125} = 0,008.$$

*Másképp:* Az első nap bárkit kisorsolhatnak. Annak a valószínűsége, hogy a hátralevő három napon is ugyanezt az embert fogják kisorsolni:

$$p = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} = 0,008.$$

c) Binomiális eloszlást használunk.

$$\begin{aligned} P(\text{legalább 2-szer kisorsolják Annát}) &= \\ &= 1 - P(0\text{-szor}) - P(1\text{-szer}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \binom{4}{1} \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \\ &= 1 - 0,4096 - 0,4096 = 0,1808 \left( = \frac{113}{625} \right). \end{aligned}$$

d) Először kiszámítjuk annak a valószínűségét, hogy mind a négy bevásárlásra Annát és Balázst sorsolják ki. A négy bevásárlás közül Anna intézhet egyet, kettőt vagy hármat, a többit pedig Balázs.

$$P(3A, 1B) = P(1A, 3B) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{4}{625} = 0,0064,$$

$$P(2A, 2B) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{6}{625} = 0,0096.$$

Tehát

$$P(A \text{ és } B \text{ vásárol minden nap}) = \frac{14}{625} = 0,0224.$$

Mivel hatféleképpen választható ki az a két ember, aki mind a négy bevásárlást intézi, azért a kért valószínűség az előbbi érték hatszorosa:

$$P(\text{kettő vásárolnak minden nap}) = \frac{84}{625} = 0,1344.$$

7. a) Határozzuk meg az  $a_n = \frac{4n-1}{n}$  sorozat legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátját.

b) Egy számtani sorozat első 11 tagjának összege 660. A sorozat első tagja, hatodik tagja, és első nyolc tagjának összege (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagját adja. Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját. (16 pont)

**Megoldás.** a)  $a_n = \frac{4n-1}{n} = 4 - \frac{1}{n}$ . Mivel az  $\frac{1}{n}$  sorozat szigorúan monoton csökken és 0-hoz tart, ezért az  $a_n = 4 - \frac{1}{n}$  sorozat szigorúan monoton nő és 4-hez tart, tehát legkisebb felső korlátja a 4, legnagyobb alsó korlátja pedig az első tagja:  $a_1 = 4 - \frac{1}{1} = 3$ .

b) Az első 11 tag összege:  $\frac{(2a_1 + 10d) \cdot 11}{2} = 660$ , innen

$$(1) \quad 2a_1 + 10d = 120,$$

azaz  $a_1 = 60 - 5d$ .

A mértani sorozatból:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + 5d}{a_1} &= \frac{(2a_1 + 7d) \cdot 8}{a_1 + 5d}, \\ a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 &= 8a_1^2 + 28a_1d, \\ 0 &= 7a_1^2 + 18a_1d - 25d^2. \end{aligned}$$

(\*) Az  $a_1$ -re kapott összefüggést ide beírva:

$$\begin{aligned} 0 &= 7(60 - 5d)^2 + 18(60 - 5d)d - 25d^2 = \\ &= (25 \cdot 200 - 4200d + 175d^2) + (1080d - 90d^2) - 25d^2 = \\ &= 60d^2 - 3120d + 25 \cdot 200 = 60(d^2 - 52d + 420). \end{aligned}$$

Innen  $d = 10$  vagy  $42$ .

*Ellenőrzés:* Az első esetben  $a_1 = 10$ ,  $a_6 = 60$  és  $S_8 = 360$  valóban egy mértani sorozat ( $q = 6$ ) három szomszédos tagja, továbbá  $S_{11} = 660$ .

A második esetben  $a_1 = -150$ ,  $a_6 = 60$  és  $S_8 = -24$  szintén valóban egy mértani sorozat ( $q = -0,4$ ) három szomszédos tagja, továbbá  $S_{11} = 660$ .

*II. megoldás* a (\*)-gal jelölt résztől kezdve:  $d^2$ -tel osztva legyen  $c = \frac{a_1}{d}$ , ezzel  $0 = 7c^2 + 18c - 25$ . Innen  $c = 1$  vagy  $-\frac{25}{7}$ , azaz  $a_1 = d$  vagy  $a_1 = -\frac{25}{7}d$ .

Ezt visszaírva az (1) egyenletbe:

$$\text{vagy } 2a_1 + 10d = 12d = 120, \quad \text{ahonnan } d = 10 \quad \text{és } a_1 = 10;$$

$$\text{vagy } 2a_1 + 10d = \frac{20}{7}d = 120, \quad \text{ahonnan } d = 42 \quad \text{és } a_1 = -150.$$

*III. megoldás:* Az első 11 tag összegéből kapjuk, hogy  $a_1 + 5d = 60$ , ez éppen a számtani sorozat 6. tagja. Ezzel a mértani sorozatból:

$$\begin{aligned} \frac{60}{60 - 5d} &= \frac{(120 - 3d) \cdot 8}{60}, \\ 3600 &= (60 - 5d)(480 - 12d), \\ 0 &= 60d^2 - 3120d + 25200 = 60(d^2 - 52d + 420). \end{aligned}$$

Innen pedig az 1. megoldásnál látottak szerint folytatható a gondolatmenet.

8. a) *Határozzuk meg  $n$  értékét úgy, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:*

$$\int_2^n 2x + 5 \, dx = \int_1^7 10n - 2x - 3x^2 \, dx.$$

b) *Mekkora területű síkidomot vág ki az  $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - 1$  függvény grafikonja az első síknegyedből?*

c) *Írjuk fel az  $f$  grafikonjához az 1 abszcisszájú pontjában húzott érintőegyenes egyenletét.* (16 pont)

**Megoldás.** a) Elvégezzük az egyenlet két oldalán kijelölt integrálásokat a Newton–Leibniz-tétel alapján:

$$\begin{aligned} [x^2 + 5x]_2^n &= [10nx - x^2 - x^3]_1^7, \\ (n^2 + 5n) - (4 + 10) &= (70n - 49 - 343) - (10n - 1 - 1), \\ n^2 - 55n + 376 &= 0. \end{aligned}$$

Innen  $n_1 = 47$  vagy  $n_2 = 8$ .

Mindkét  $n$ -re valóban teljesül az egyenlőség: az első esetben 2430, a második esetben pedig 90 az integrálok értéke az egyenlet mindkét oldalán.

b) Megkeressük, hogy az  $f$  grafikonja hol metszi az  $x$  tengely pozitív félegyenesét:  $\frac{4}{(x+1)^2} - 1 = 0$ , ebből (az  $x > 0$  feltétel mellett)  $x = 1$ .

Mivel az  $f$  grafikonja az  $y$  tengelyt metszi (+3-ban), ezért az első síknegyedből levágott síkidom területét az

$$\int_0^1 \left( \frac{4}{(x+1)^2} - 1 \right) dx$$

integrál értéke adja meg:

$$T = \int_0^1 \left( \frac{4}{(x+1)^2} - 1 \right) dx = \left[ -\frac{4}{x+1} - x \right]_0^1 = (-3) - (-4) = 1.$$

A kérdéses síkidom tehát éppen egységnyi területű.

c) Az érintőegyenes meredekségét az  $f$  deriváltfüggvényének az  $x = 1$ -ben felvett értéke adja:

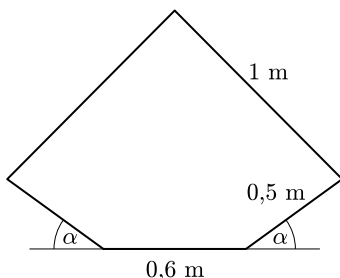
$$f'(x) = -\frac{8}{(x+1)^3}, \quad \text{tehát } f'(1) = -1.$$

Az 1 abszcisszájú pont második koordinátája:

$$f(1) = \frac{4}{(1+1)^2} - 1 = 0.$$

Az érintőegyenes egyenlete  $y = 1 - x$ .

9. Egy villanyozdony áramszedőjét két ponton rögzítették a mozdony tetejéhez, ezek távolsága 0,6 méter. Az áramszedő négy, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból áll. A két rövidebb szakasz 0,5 méter, a két hosszabb szakasz 1 méter hosszú (lásd az ábrát). Az áramszedő egyes szakaszai a mozdony tetejéhez és egymáshoz képest csuklósan szabadon elmozdulhatnak. Jelölje  $h(\alpha)$  az áramszedő legmagasabb pontjának magasságát a mozdony tetejéhez képest akkor, amikor mindkét rövidebb ág  $\alpha$  szöget zár be a mozdony tetejének síkjával.



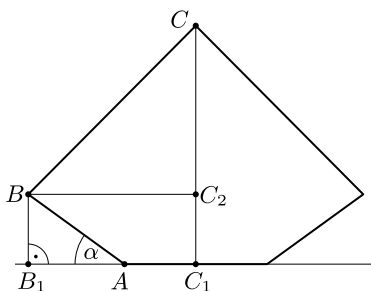
a) Igazoljuk, hogy  $h(\alpha) = \sqrt{1 - (0,3 + 0,5 \cos \alpha)^2} + 0,5 \sin \alpha$ .

b) Milyen magasan lesz az áramszedő legmagasabb pontja  $\alpha = 25^\circ$  esetén?

c) Mekkora  $\alpha$  szög esetén lesz az áramszedő legmagasabb pontja éppen 1 méter magasságban?

(16 pont)

**Megoldás.** a) Az ábra jelöléseit használjuk.



Az áramszedő egyik rövidebb ága  $AB = 0,5$  (m), ez az  $A$  pontban csatlakozik a mozdony tetejéhez. A  $B$  pont merőleges vetülete a mozdony tetősíkjára  $B_1$ . Ekkor  $\angle BAB_1 = \alpha$ ,  $AB_1 = 0,5 \cos \alpha$ ,  $BB_1 = 0,5 \sin \alpha$ .

Az áramszedő hosszabbik ága  $BC = 1$  (m). A  $C$  pont merőleges vetülete a mozdony tetősíkjára  $C_1$ . A  $B$  pont merőleges vetülete a  $CC_1$  egyenesre  $C_2$ .

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= CC_1 = CC_2 + C_2C_1 = \sqrt{1 - C_2B^2} + BB_1 = \sqrt{1 - (C_1A + AB_1)^2} + 0,5 \sin \alpha = \\ &= \sqrt{1 - (0,3 + 0,5 \cos \alpha)^2} + 0,5 \sin \alpha, \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó volt.

b)  $\alpha = 25^\circ$  esetén

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \sqrt{1 - (0,3 + 0,5 \cos 25^\circ)^2} + 0,5 \sin 25^\circ \approx \\ &\approx \sqrt{1 - (0,3 + 0,5 \cdot 0,9063)^2} + 0,5 \cdot 0,4226 \approx 0,869, \end{aligned}$$

tehát ebben az esetben az áramszedő csúcs kb. 87 cm magasan lesz a mozdony tetejéhez képest.

c) Megoldandó a  $\sqrt{1 - (0,3 + 0,5 \cos \alpha)^2} + 0,5 \sin \alpha = 1$  egyenlet. A négyzetre emelést elvégezve és átrendezve:

$$\sqrt{0,91 - 0,3 \cos \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{4}} = 1 - 0,5 \sin \alpha.$$

Emeljük négyzetre most az egyenletet:

$$0,91 - 0,3 \cos \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{4} = 1 - \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{4}.$$

Átrendezve:

$$\sin \alpha - 0,09 - \left( \frac{\sin^2 \alpha}{4} + \frac{\cos^2 \alpha}{4} \right) = 0,3 \cos \alpha.$$

Kihasználva, hogy  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , kapjuk, hogy  $\sin \alpha - 0,34 = 0,3 \cos \alpha$ .

(\*) Ismét négyzetre emelünk:

$$\sin^2 \alpha - 0,68 \sin \alpha + 0,1156 = 0,09 \cos^2 \alpha.$$

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$  helyettesítéssel:

$$1,09 \sin^2 \alpha - 0,68 \sin \alpha + 0,0256 = 0,$$
$$\sin \alpha_{1,2} \approx \frac{0,68 \pm \sqrt{0,68^2 - 4 \cdot 1,09 \cdot 0,0256}}{2 \cdot 1,09} = \frac{0,68 \pm \sqrt{0,350784}}{2,18} \approx \frac{0,68 \pm 0,5923}{2,18}.$$

Azaz  $\sin \alpha \approx 0,5836$ , tehát  $\alpha \approx 35,705^\circ$ , vagy  $\sin \alpha \approx 0,0402$ , tehát  $\alpha \approx 2,306^\circ$ .

Ez utóbbi a második négyzetre emelésnél keletkezett hamis gyök (a négyzetre emelés előtt az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala pozitív). Előbbi érték viszont valóban megoldása a feladatnak, hiszen könnyű meggyőződni róla, hogy ebben az esetben mindkét négyzetre emelésnél az egyenlőség mindkét oldala pozitív.

Tehát  $\alpha \approx 36^\circ$  esetén lesz a mozdony áramszedőjének csúcsa éppen 1 méter magasan.

*II. megoldás* a (\*)-gal jelölt résztől kezdve:

$$\sin \alpha - 0,3 \cos \alpha = 0,34.$$

$\sqrt{1^2 + 0,3^2} = \sqrt{1,09} (\approx 1,044)$ -gyel osztva:

$$\frac{1}{\sqrt{1,09}} \sin \alpha - \frac{0,3}{\sqrt{1,09}} \cos \alpha = \frac{0,34}{\sqrt{1,09}}.$$

Mivel  $\frac{1}{\sqrt{1,09}} \approx \cos 16,699^\circ$  és  $\frac{0,3}{\sqrt{1,09}} \approx \sin 16,699^\circ$ , ezért ez (az ismert addíciós tétel segítségével) így írható:

$$\sin \alpha \cos 16,699^\circ - \cos \alpha \sin 16,699^\circ = \sin(\alpha - 16,699^\circ) = \frac{0,34}{\sqrt{1,09}} \approx \sin 19,006^\circ,$$

ahonnan (mivel  $\alpha$  hegyesszög)  $\alpha - 16,699^\circ \approx 19,006^\circ$ , azaz  $\alpha \approx 35,705^\circ$ .