## I. rész

**1.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget, illetve egyenletet:
*a)* $\log_4\left(x^2-3x\right)\le 1$; *(5 pont)*
*b)* $x^2\cdot|\sin x|=\sin x$. *(6 pont)*

**2.** Egy ismert hazai társasjáték játéktábláján körben egymás után 40 sorszámozott mező található. A játékosok az 1. sorszámú START mezőről indulnak, és mindig annyit lépnek előre, amennyit egy szabályos dobókockával dobnak. Ha egy játékos bábujával olyan mezőre lép, ahol már áll egy másik bábu, akkor kiüti azt, és a kiütött bábut a START mezőre visszahelyezi. A játékosok a játékot játékpénzzel játsszák, és annak megkezdésekor mindenki 20 000 Ft kezdőösszeggel indul.

*a)* Hányféle sorrendben számolhat le a pénztáros Csabának 2 db 5000 Ft-os, 8 db 1000 Ft-os, 3 db 500 Ft-os és 5 db 100 Ft-os játékpénzt? *(3 pont)*

*b)* Hányféle különböző címletezésben kaphatja meg Csaba a kezdőösszeget, ha csak a három nagy címlet (5000 Ft, 1000 Ft és 500 Ft) mindegyikéből kap? *(4 pont)*

*c)* Csaba első tizenöt dobásának átlaga 4,2 volt, és közben egyszer sem ütötték ki. Hányas sorszámú mezőn áll most Csaba figurája? *(3 pont)*

*d)* László figurája kettő mezővel áll Csabáé mögött, miután Csaba lépett. Mekkora annak a valószínűsége, hogy László a következő dobásával kiüti Csabát? *(2 pont)*

**3.** Egy körhöz az $O$ középpontjától 7 cm-re levő külső $P$ pontból szelőt húzunk. A szelő körrel vett $A$ és $B$ metszéspontjai $P$-től rendre 4 cm, illetve 8 cm távolságra vannak.
*a)* Milyen hosszú érintőszakasz húzható $P$-ből a körhöz? *(3 pont)*
*b)* Mekkora szögben látszik az $OB$ szakasz a $P$ pontból? *(4 pont)*
*c)* Számítsuk ki az $ODE$ háromszög területét, ahol $D$ az $AB$ húr felezőpontja, $E$ pedig az érintési pont. *(7 pont)*

**4.** Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja 3, differenciája 5, egy $\{b_n\}$ számtani sorozat első tagja 2, differenciája 1.
*a)* Határozzuk meg, hogy hány darab háromjegyű köbszám szerepel az $\{a_n\}$ sorozat első 100 tagja között. *(4 pont)*
*b)* A $\{b_n\}$ sorozat első 85 tagja közül hányféleképpen lehet 5 különböző számot kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott számok mértani sorozatot alkossanak? *(10 pont)*

## II. rész

**5.** Adott a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $f(x)=2x-x\sqrt{x}$ függvény.
*a)* Adjuk meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis): *(8 pont)*

Az $A(-1;5)$ és $B(4;0)$ pontokra illeszkedő egyenes éppen
az $f$ függvény $B$ pontbeli érintője.

*b)* Számítsuk ki az $f$ függvény grafikonja és az $x$ tengely által határolt korlátos síkidom területét. *(8 pont)*

**6.** Az alábbi táblázatban egy nagyáruházban dolgozók havi bruttó bérének gyakorisága látható.

| Bruttó bér (ezer Ft) | 95 | 110 | 120 | 125 | 160 | 200 | 230 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gyakoriság | 7 | 4 | 2 | 5 | 3 | 2 | 1 |

*a)* Melyik az a bérérték, amelynél a dolgozók legalább fele nem keres kevesebbet, legalább fele pedig nem keres többet? *(2 pont)*

*b)* Mennyivel változik a havi bruttó bérek szórása, ha a dolgozók egységesen 10%-os béremelést kapnak? *(4 pont)*

Az áruházban számos furfangos trükköt alkalmaznak a termékek elhelyezésére azért, hogy a vásárlók pontosan azokat az árucikkeket vegyék meg, amelyeken a bolt a legtöbbet keresi. Az egyik ilyen trükk a polcok különböző zónákra osztása, melyet az alábbi táblázatban láthatunk.

| **Zónák** | **Vásárlási valószínűség az adott polcról** | **A polcon található termékek átlagára** |
|---|---|---|
| **Nyújtózkodási zóna** | 0,1 | 1400 Ft |
| **Szemmagassági zóna** | 0,5 | 900 Ft |
| **Kézzel elérhető zóna** | 0,3 | 700 Ft |
| **Lehajló zóna** | 0,1 | 400 Ft |

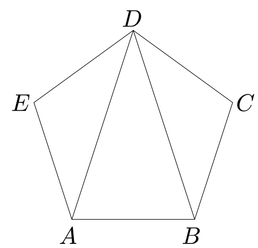
$c$) Mekkora a vásárlási összeg várható értéke egy áru fenti polcrendszerről történő vásárlása esetén? (*2 pont*)

A nagyáruházban az egyik délután megfigyelték, hogy 65% annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló nő. Ebben az időszakban a nőknél 70% az esélye, hogy kártyával fizetnek, míg a férfiak csak 40%-ban fizetnek kártyával.

$d$) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a pénztárnál sorban álló 8 ember közül pontosan 5 nő? (*3 pont*)

$e$) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló kártyával fizet? (*5 pont*)

**7.** Adott az *ábrán* látható szabályos ötszög.

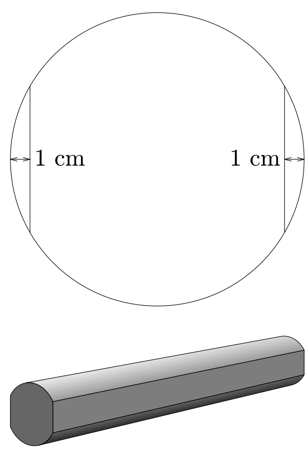



$a$) Igazoljuk, hogy az ötszögben $AB^2 = AP \cdot AD$, ha $P$ az $AD$ átló és az $ABD$ háromszög $B$ csúcsából induló belső szögfelezőjének metszéspontja. (*8 pont*)

$b$) Hány különböző kört határoznak meg egy 5 pontú teljes gráf élei? (*8 pont*)

(Két kört azonosnak tekintünk, ha mindkettőben ugyanazok a csúcsok és ugyanazok az élek szerepelnek.)

**8.** Egy erdei turistautat átszelő patak fölött az erdészet hidat készít, amihez 22 db 15 cm átmérőjű, henger alakú farönköt használnak, melyek hossza 1,2 m. A jobb illesztés érdekében a rönköket a forgástengelyükkel párhuzamosan, 1-1 cm-es maximális mélységben, teljes hosszukban az *ábra* szerint mindkét oldalon legyalulják, és ezeknek az egyenes felületeknek a mentén fogatják össze a darabokat. A híd két végénél lévő két farönköt csak az egyik oldaluknál gyalulják le.




$a$) Mennyi faanyagot tartalmaz a híd elkészített állapotában? (*8 pont*)

A farönkök legyalulása után azok mindegyikének teljes felületét egyesével lefestik.

$b$) Mekkora lesz az összes lefestett felület nagysága? (*8 pont*)

**9.** Tekintsük az

$$a_n = \left\{ \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right\}$$

sorozatot, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

$a$) Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat első $n$ tagjának összege $S_n = 1 - \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$. (*9 pont*)

$b$) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)$ határértéket, majd adjuk meg, hogy a sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezetébe. (*7 pont*)