A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap[1]

1. *Minden $a_0 > 1$ egész számra definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatot a következőképpen. Minden $n \geq 0$-ra legyen*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ha } \sqrt{a_n} \text{ egész szám,} \\ a_n + 3 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az összes olyan a_0 értéket, amihez van olyan A szám, amire $a_n = A$ teljesül végtelen sok n-re.

Gáspár Attila megoldása.

1. állítás: *Ha $a_0 \equiv 0 \pmod 3$, akkor a sorozat tartalmazza a 3-at.*

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 3$, akkor az állítás triviális. Ha $a_0 = 6$, akkor $a_1 = 9$, és $a_2 = 3$, ezért az állítás igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \geq 9$.

Látható, hogy az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \dots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. A sorozat összes eleme 3-mal osztható, ezért ez a négyzetszám $x^2 = (3k)^2$ alakú. Végtelen sok 3-mal osztható négyzetszám van, ezért a sorozat tartalmaz négyzetszámot. A $\big(3(k-1)\big)^2 = (x-3)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 = x(x-6) + 9 > x + 9 > x$. Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel. $x < a_0$, ezért az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

Látható, hogy ha $a_0 = 3$, akkor $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ és $a_3 = 3$. Ha $3 \mid a_0$, akkor az 1. állítás miatt a 3 végtelen sokszor szerepel a sorozatban.

2. állítás: *Ha $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, akkor a sorozat tartalmaz $3k+2$ alakú számot.*

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 1$, akkor $a_1 = 4$, és $a_2 = 2$. Ebből látható, hogy az állítás $a_0 = 4$ esetén is igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \geq 7$.

Látható, hogy az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \dots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. Ilyen biztosan van, mert végtelen sok $3k+1$ alakú négyzetszám van. Legyen ez a négyzetszám x^2. Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel.

Ha $x = 3k+2$ alakú, akkor az állítás igaz.

Ha $x = 3k+1$ alakú, akkor a $(3k-1)^2 = (x-2)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 = x(x-4) + 4 > x + 4 > x$. Az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

3. állítás: *Ha $a_0 \equiv 2 \pmod 3$, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő.*

Egy négyzetszám nem lehet $3k+2$ alakú. Így az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \dots$ sorozat nem tartalmaz négyzetszámot. Ekkor $a_1 = a_0 + 3$, $a_2 = a_0 + 6$, $\dots$, $a_n = a_0 + 3n$. Ezzel az állítást igazoltuk.

Látható, hogy ha a_0 nem osztható 3-mal, akkor a 2. és 3. állítás miatt a sorozat egy idő után szigorúan monoton növekvő. Így nincs olyan A, amit végtelen sokszor tartalmaz.

Tehát pontosan akkor van olyan A, amit végtelen sokszor tartalmaz a sorozat, ha $3 \mid a_0$.

2. *Legyen $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire minden valós x, y szám esetén teljesül*

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy).$$

Matolcsi Dávid megoldása. Ha $f(0) = 0$, akkor $y = 0$-nál ezt kapjuk:

$$f\big(f(x)f(0)\big) + f(x+0) = f(0 \cdot x).$$

Ebben az esetben $f(x) = 0$ minden x-re. Ez valóban megoldása a függvényegyenletnek.

Most nézzük azt az esetet, amikor $f(0) \neq 0$. Ha $x = 0$ és $y = 0$, akkor

$$f\big(f(0)^2\big) + f(0) = f(0), \quad f\big(f(0)^2\big) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $f(c) = 0$ és $c \neq 1$. Ha $y = 1 + \dfrac{1}{x-1}$, akkor $(x-1)(y-1) = 1$, azaz $x + y = xy$, ezért $f(x+y) = f(xy)$, így $f\big(f(x)f(y)\big) = 0$.

[1] A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Legyen $x=c$ és $y=1+\dfrac{1}{c-1}$. Ekkor $f\left(f(c)f\left(1+\dfrac{1}{c-1}\right)\right)=0$. Mivel $f(c)=0$, $f(0)=0$, ez viszont ellentmond az elején kikötött feltételnek.

Azt kaptuk, hogy $f(c)=0$ esetén $c=1$, így $f(0)^2=1$, ezért $f(1)=f\big(f(0)^2\big)=0$, továbbá $f(0)=1$ vagy $f(0)=-1$.

Világos, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor megoldása a függvényegyenletnek, ha $-f(x)$ is megoldása (mindkét oldal előjele megfordul). Ezért az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $f(0)=-1$.

Helyettesítsünk most az egyenletbe $y=1$-et:

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(1)\big)+f(x+1)&=f(1\cdot x),\\ f(0)+f(x+1)&=f(x),\\ f(x+1)&=f(x)+1. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy n egészekre $f(x+n)=f(x)+n$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ injektív. Tegyük fel, hogy nem az, vagyis létezik olyan $A\neq B$, hogy $f(A)=f(B)$. Legyen n egy A-nál nagyobb egész, és legyen $A-n=a$ és $B-n=b$, ahol tudjuk, hogy a negatív.

Ha $f(A)=f(B)$, akkor $f(a)=f(b)$. Az $x^2-bx+a-1=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $b^2-4(a-1)$, ami pozitív (mivel $a-1$ negatív), ezért az egyenletnek két gyöke van, r és s. A Viéte-formulákból tudjuk, hogy $r+s=b$ és $rs=a-1$; így $x=r$ és $y=s$ választással $f\big(f(r)f(s)\big)+f(b)=f(a-1)=f(a)-1$.

Az egyenletből kivonható $f(a)=f(b)$: $f\big(f(r)f(s)\big)=-1$, $f\big(f(r)f(s)+1\big)=0$, amiből $f(r)f(s)+1=1$, azaz $f(r)f(s)=0$. Feltehető, hogy $s=1$, ekkor $a=1\cdot r+1$ és $b=r+1$, tehát $a=b$, ezzel ellentmondásra jutottunk; a függvény valóban injektív.

Legyen $y=1-x$. Ekkor $f\big(f(x)f(1-x)\big)+f(1)=f\big(x(1-x)\big)$,

$$f\big(f(x)f(1-x)\big)=f\big(x-x^2\big).$$

Az injektivitás miatt $f(x)f(1-x)=x-x^2$.

Legyen most $y=-x$. Ekkor $f\big(f(x)f(-x)\big)+f(0)=f\big(-x^2\big)$,

$$f\big(f(x)f(-x)\big)-1=f\big(-x^2\big),$$

$f\big(f(x)f(-x)\big)=f\big(1-x^2\big)$.

Az injektivitás miatt $f(x)f(-x)=1-x^2$, ezért $f(x)f(1-x)-f(x)f(-x)=x-x^2-\big(1-x^2\big)=x-1$. Másrészt

$$f(x)f(1-x)-f(x)f(-x)=f(x)\big(f(1-x)-f(-x)\big)=f(x).$$

Így $f(x)=x-1$ minden x-re. Ez valóban jó megoldás: $(x-1)(y-1)-1+x+y-1=xy-1$.

Ez volt a megoldás, amikor $f(0)=-1$, és ennek az ellentettje, $f(x)=1-x$ a megoldás, amikor $f(0)=-1$.

Tehát a függvényegyenletnek három megoldása van: $f(x)=0$, $f(x)=x-1$ és $f(x)=1-x$.

3. *Egy vadász és egy láthatatlan nyúl egy játékot játszik az euklideszi síkon. A nyúl A_0 kiindulópontja és a vadász B_0 kiindulópontja egybeesnek. A játék $(n-1)$-edik menete után a nyúl az A_{n-1} pontban, a vadász a B_{n-1} pontban van. A játék n-edik menetében a következő három dolog történik, ebben a sorrendben:*

(i) *A nyúl láthatatlan módon egy olyan A_n pontba megy, amire A_{n-1} és A_n távolsága pontosan 1.*

(ii) *Egy nyomkövető eszköz megad egy P_n pontot a vadásznak. Az eszköz által a vadásznak nyújtott információ mindössze annyi, hogy P_n és A_n távolsága legfeljebb 1.*

(iii) *A vadász látható módon egy olyan B_n pontba megy, amire B_{n-1} és B_n távolsága pontosan 1.*

Igaz-e, bárhogyan mozogjon is a nyúl, és bármilyen pontokat jelezzen is a nyomkövető eszköz, hogy a vadász mindig meg tudja úgy választani a mozgását, hogy 10^9 menet után a távolság közte és a nyúl között legfeljebb 100 legyen?

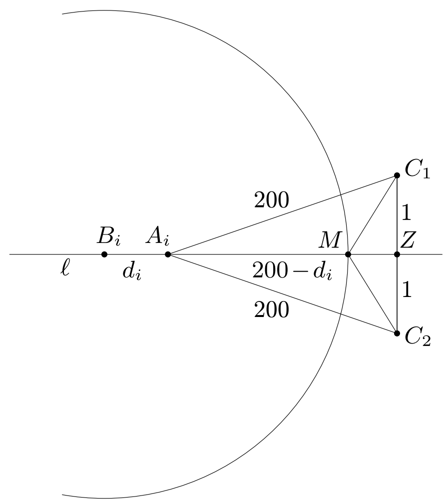
Kovács Benedek megoldása. A feladat állítása nem igaz: belátjuk, hogy a vadász akármilyen stratégiája esetén a nyomkövető jelezheti $P_1,P_2,\dots,P_{10^9}$ pontok olyan sorozatát, hogy a nyúlnak létezzen olyan, a szabályok szerinti $A_0A_1A_2\dots A_{10^9}$ lehetséges mozgássorozata, amire $B_{10^9}A_{10^9}>100$. Vagyis ha a nyúl maga jelölheti ki a nyomkövető jelzéseit a számára legkedvezőbb módon, akkor a vadász nem tudja garantálni, hogy 100-on belül kerüljön a nyúlhoz.

Legyen $d_i=A_iB_i$. A nyúl célja az, hogy $d_{10^9}>100$ legyen. Nyilván az is elég számára, ha valamilyen $i<10^9$-re $d_i>100$, hiszen ha ekkor a nyúl a további lépésekben már mindig a vadásszal ellentétes irányban lép, akkor lépésével a vadásztól való távolságát 1-gyel növeli, a vadász pedig a saját lépésében legfeljebb 1-gyel csökkentheti, vagyis egy fordulón belül a távolság nem csökken, így a 10^9-edik forduló után is 100-nál nagyobb lesz.

Lemma. *Ha az i. fordulóban $d_i<100$, a vadász nem tudja garantálni, hogy $d_{i+200}^2\le d_i^2+\dfrac{1}{2}$ legyen.*

Bizonyítás. A nyúl tehát 200 forduló alatt szeretné a vadásztól vett távolságának négyzetét $\frac{1}{2}$-nél többel megnövelni. A vadásznak az i-edik forduló kezdetekor a nyúl mozgásáról rendelkezésére álló információt a $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ pontok jelentik. Ezen pontok alapján a nyúlnak akár több lehetséges helye is lehet, de most tegyük fel még azt is, hogy a nyúl konkrétan elárulja a helyzetét, az A_i pontot. A korábbi információk így feleslegessé válnak.

Jelöljük ℓ-lel az A_iB_i egyenest ($A_i = B_i$ esetén tetszőleges egyenest A_i-n keresztül). Mérjük fel az *ábra* szerint az l egyenesre az A_i pontból, B_i-vel ellentétes irányban $\sqrt{39999}$ egységet, így kapva a Z pontot. A Z pontban merőlegest állítva ℓ-re, ezen a merőlegesen vegyük fel a C_1 és C_2 pontokat Z-től 1 távolságra. Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt $A_iC_1 = A_iC_2 = \sqrt{39999+1} = 200$ lesz.



A nyúl számára a következő 200 fordulóban az lesz a stratégia, hogy egyenesen elmegy a C_1 célpontba (ezt megteheti, hiszen $A_iC_1 = 200$). Mivel a teljes A_iC_1 szakasz 1 távolságon belül van az ℓ egyenestől, a nyúl minden fordulóban kijelölheti helyzetének az ℓ-re vett merőleges vetületét, mint a nyomkövető által adandó jelzést.

Természetesen ugyanezeket a jelzéseket megadhatná a nyúl akkor is, ha nem a C_1, hanem a C_2 pontba menne el hasonló módon, hiszen a két útvonal ℓ-re nézve szimmetrikus. A vadász így a 200 forduló alatt kapott jelzésekből nem fogja tudni, hogy a C_1 vagy a C_2 pont felé tart-e a nyúl. Nézzük azt a B_{i+200} pontot, ahova a vadász ezalatt eljutott. Ez a pont biztosan a B_i középpontú, 200 sugarú körön belül van, legyen ennek az ℓ-lel való (a nyúl irányába eső) metszéspontja M.

Osszuk fel ezt a kört két részre az ℓ egyenes (C_1C_2 felezőmerőlegese) mentén. Az egyik (az ábra szerint felső) részben lévő pontok a C_1 célponthoz, a másik (alsó) részben lévők C_2-höz vannak közelebb. A felső rész összes pontjára igaz, hogy legalább olyan távol vannak C_2-től, mint M, mert mind vízszintesen, mind függőlegesen legalább olyan távol vannak tőle (ha az ábra szerint, vagyis az ℓ egyenessel párhuzamosnak vesszük a vízszintes irányt). Ugyanígy az alsó rész összes pontja legalább olyan távol van C_1-től, mint M.

Így a két lehetséges célpont közül a távolabbi mindenképpen legalább olyan messze lesz a vadásztól, mint az $MC_1 = MC_2$ távolság. Számítsuk ki ezt a távolságot. $B_iA_i = d_i$, így $A_iM = 200 - d_i$. Így $MZ = A_iZ - A_iM = \sqrt{39999} - 200 + d_i$, és a Pitagorasz-tétel alapján

$$MC_1 = \sqrt{MZ^2 + C_1Z^2} = \sqrt{\left(\sqrt{39999} - 200 + d_i\right)^2 + 1}.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez a távolság nagyobb, mint $\sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\sqrt{39\,999} - 200 + d_i\right)^2 + 1} &> \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}},\\
\left(\sqrt{39\,999} - 200 + d_i\right)^2 + 1 &> d_i^2 + \frac{1}{2},\\
d_i^2 + 2\left(\sqrt{39\,999} - 200\right)d_i + 80\,000 - 400\sqrt{39\,999} &> d_i^2 + \frac{1}{2},\\
2\left(\sqrt{39\,999} - 200\right)d_i - 400\sqrt{39\,999} + 80\,000 &> \frac{1}{2},\\
2\left(\sqrt{39\,999} - 200\right)d_i + 400\left(200 - \sqrt{39\,999}\right) &> \frac{1}{2},\\
(400 - 2d_i)\left(200 - \sqrt{39\,999}\right) &> \frac{1}{2},\\
(200 - d_i)\left(200 - \sqrt{39\,999}\right) &> \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Mivel $d_i \le 100$, azaz $200 - d_i \ge 100$, elég belátni, hogy

$$\begin{aligned}
200 - \sqrt{39\,999} &> \frac{1}{400},\\
80\,000 - 400\sqrt{39\,999} &> 1,\\
79\,999 &> 400\sqrt{39\,999}.
\end{aligned}$$

Négyzetre emelve:

$$79\,999^2 > 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ez pedig igaz, mert

$$79\,999^2 - 1 = 80\,000 \cdot 79\,998 = 16\,0000 \cdot 39\,999 = 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ekvivalens lépésekkel dolgoztunk, így a vadász számára rosszabbik távolság legalább $MC_1 > \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$, így a lemmát beláttuk.

A lemmából már következik a bizonyítandó állítás: a játék elején $d_0^2 = 0$, és a lemma szerint (teljes indukcióval) a vadász számára legrosszabb esetben $d_{200n}^2 > \frac{1}{2}n$, amíg a távolság el nem éri a 100-at. Ez az elérés pedig legkésőbb $n = 2 \cdot 100^2 = 20\,000$-re bekövetkezik, azaz $200 \cdot 20\,000 = 4 \cdot 10^6$ fordulón belül. Vagyis $d_{4\cdot 10^6}^2 > 10\,000$, azaz $d_{4\cdot 10^6} > 100$. A nyúl ezzel elérte a célját, hiszen $4 \cdot 10^6 \le 10^9$.