Bevezetés[1]

A számelmélet bővelkedik a hosszú időn át vagy akár a mai napig megoldatlan problémákban, ilyenek például a Goldbach-sejtés, az ikerprímsejtés vagy a már igazolást nyert Fermat-sejtés. Ezek közös jellemzője, hogy az általános iskolai tananyag ismeretében lényegében megérthetőek, nincs szükség hozzájuk felsőbb matematikai tudásra, a bizonyításuk mégis évszázadok óta várat vagy váratott magára.

A diofantoszi számötösökről szóló, kevésbé közismert sejtésről mindez ugyanígy elmondható, ráadásul a bizonyítását a közelmúltban jelentették be. Ennek apropóján a következőkben ezt a problémát járjuk körül, bemutatva a kérdéskörhöz kapcsolódó, kiterjedt kutatások aktuális állását és számos nyitott kérdését.

Először *Diophantosz* ókori görög matematikus adott meg négy olyan pozitív racionális számot, melyek közül bármelyik kettő szorzatához 1-et hozzáadva egy racionális szám négyzetét kapjuk. *Pierre de Fermat* volt az, akinek sikerült négy ugyanilyen tulajdonságú egész számot találnia, méghozzá az $\{1, 3, 8, 120\}$ számnégyest. Ezek valóban megfelelőek, ugyanis

$$\begin{aligned} &1 \cdot 3 + 1 = 2^2, && 1 \cdot 8 + 1 = 3^2, && 1 \cdot 120 + 1 = 11^2, \\ &3 \cdot 8 + 1 = 5^2, && 3 \cdot 120 + 1 = 19^2, && 8 \cdot 120 + 1 = 31^2. \end{aligned}$$

Leonhard Euler egy racionális szám, a $\dfrac{777\,480}{8\,288\,641}$ hozzávételével el tudta érni, hogy továbbra is fennálljon az elvárt tulajdonság, hiszen

$$\begin{aligned} &1 \cdot \frac{777\,480}{8\,288\,641} + 1 = \left(\frac{3011}{2879}\right)^2, && 3 \cdot \frac{777\,480}{8\,288\,641} + 1 = \left(\frac{3259}{2879}\right)^2, \\ &8 \cdot \frac{777\,480}{8\,288\,641} + 1 = \left(\frac{3809}{2879}\right)^2, && 120 \cdot \frac{777\,480}{8\,288\,641} + 1 = \left(\frac{10\,079}{2879}\right)^2, \end{aligned}$$

viszont senkinek nem sikerült ilyen pozitív egész számot találnia. *Alan Baker* és *Harold Davenport* 1969-ben bizonyították be, hogy a Fermat-féle számnégyes pozitív egész számmal nem bővíthető megfelelő számötössé, sőt az $\{1, 3, 8\}$ számhármas a 120-on kívül nem egészíthető ki más pozitív egész számmal ilyen számnégyessé.

Diofantoszi számhalmazok létezése

A pozitív egész számok halmazának egy legalább kételemű A részhalmazát *diofantoszi számhalmaznak* nevezzük, ha bármely $a, b \in A$, $a \neq b$ esetén $ab+1$ négyzetszám. Ha egy diofantoszi számhalmaz n elemű véges halmaz, akkor *diofantoszi szám-n-esnek*, $n = 2$ esetén *diofantoszi számpárnak* is hívjuk. Egyszerű észrevétel, mégis érdemes megfogalmazni, hogy egy diofantoszi számhalmaz minden legalább kételemű részhalmaza szintén diofantoszi számhalmaz.

A definíció és az ahhoz fűzött megjegyzés ismeretében az egyik legtermészetesebb kérdés az, hogy milyen elemszámú diofantoszi számhalmazok léteznek, különös tekintettel arra, hogy mi a legnagyobb lehetséges elemszám.

Végtelen diofantoszi számhalmazok. Kezdjük azzal a kérdéssel, hogy létezik-e végtelen diofantoszi számhalmaz, mivel ennek megválaszolása során be tudjuk mutatni a problémakör vizsgálatának egyik kulcsfontosságú ötletét.

Ha egy legalább négyelemű diofantoszi számhalmaznak három különböző eleme a, b, c, akkor tetszőleges további x eleme esetén $ax + 1$, $bx + 1$, $cx + 1$ négyzetszámok, ezért szorzatuk is négyzetszám, azaz valamilyen y pozitív egész számmal

$$(ax + 1)(bx + 1)(cx + 1) = y^2.$$

Ez egy elliptikus egyenlet, így nevezzük ugyanis az $f(x) = y^2$ alakú diofantoszi egyenleteket, ahol $f(x)$ egy harmadfokú polinom.

Louis J. Mordell 1922-ben bebizonyította, hogy ha ennek a polinomnak a gyökei egyszeresek, akkor az elliptikus egyenletnek csak véges sok megoldása lehet. Alan Baker 1968-ban ennél egy még erősebb állítást igazolt, a gyökökre vonatkozó feltétel megtartása mellett megadott az elliptikus egyenlet megoldásainak abszolút értékére egy felső korlátot. Meg kell jegyeznünk, hogy ezek igen komoly matematikai eredmények, Baker ezt megalapozó munkájáért, valamint annak különböző diofantoszi egyenletekre történő alkalmazásaiért elnyerte az egyik legrangosabb matematikai díjat, a Fields-medált.

Visszatérve a mi kérdésünkre, akár Mordell, akár Baker tételéből következik, hogy csak véges sok lehetséges x létezik, tehát minden diofantoszi számhalmaz véges halmaz.

Diofantoszi számpárok. Könnyedén tudunk végtelen sok diofantoszi számpárt konstruálni. Egyszerűen egy tetszőlegesen választott, 1-nél nagyobb négyzetszámnál 1-gyel kisebb számnak kell vennünk egy osztópárját. De meg

[1] Az írás az OTKA 115479 pályázat támogatásával készült.

tudunk adni diofantoszi számpárokat paraméteresen is, például $\{1, k^2+2k\}$ és $\{k, k+2\}$ diofantoszi számpárok minden k pozitív egész szám esetén.

Diofantoszi számpárokat a Fibonacci-számok segítségével is kaphatunk. A Cassini-azonosság szerint minden k pozitív egész szám esetén $F_k F_{k+2} + (-1)^k = F_{k+1}^2$, így ha k még ráadásul páros is, akkor $\{F_k, F_{k+2}\}$ diofantoszi számpár.

Diofantoszi számhármasok. Euler megmutatta, hogy minden diofantoszi számpár kiegészíthető diofantoszi számhármassá. Legyen ugyanis $\{a, b\}$ egy tetszőleges diofantoszi számpár, ahol $ab + 1 = r^2$. Ekkor $\{a, b, a+b+2r\}$ diofantoszi számhármas, ugyanis

$$a(a+b+2r)+1=(a+r)^2, \qquad b(a+b+2r)+1=(b+r)^2.$$

Érdekességként megemlítjük, hogy ha a Fibonacci-számok segítségével fent megadott $\{F_k, F_{k+2}\}$ ($k \geq 2$ páros) diofantoszi számpárt bővítjük ezen a módon, akkor az $\{F_k, F_{k+2}, F_{k+4}\}$ diofantoszi számhármashoz jutunk, melynek tehát harmadik eleme is Fibonacci-szám.

Diofantoszi számnégyesek. Euler ennél tovább is tudott menni, a diofantoszi számpárokból nyert diofantoszi számhármasokat sikerült kiegészítenie diofantoszi számnégyesekké. *Joseph Arkin, Verner E. Hoggatt Jr.* és *Ernst G. Straus* 1979-ben megmutatta, hogy ez általánosabban is megtehető, bármelyik diofantoszi számhármashoz megadható egy negyedik pozitív egész szám, aminek hozzávételével diofantoszi számnégyeshez jutunk. Vegyünk ehhez egy tetszőleges $\{a, b, c\}$ diofantoszi számhármast, ahol $ab+1 = r^2$, $ac+1 = s^2$, $bc+1 = t^2$. Ekkor $\{a, b, c, a+b+c+2abc+2rst\}$ diofantoszi számnégyes, mivel

$$\begin{aligned} a(a+b+c+2abc+2rst)+1&=(at+rs)^2,\\ b(a+b+c+2abc+2rst)+1&=(bs+rt)^2,\\ c(a+b+c+2abc+2rst)+1&=(cr+st)^2. \end{aligned}$$

A konstrukcióból az is következik, hogy végtelen sok diofantoszi számnégyes létezik. Ugyanakkor meglepő lehet, de az összes eddig ismert diofantoszi számnégyes ilyen, ún. reguláris alakú, azaz a legnagyobb eleme a másik háromból ezzel a szabállyal áll elő. Nyitott azonban az a kérdés, hogy van-e másfajta diofantoszi számnégyes.

Diofantoszi számötösök. Sokáig tartotta magát az a sejtés, miszerint nem létezik diofantoszi számötös. Ez nem független az előbb említett problémától sem, hiszen ha létezne diofantoszi számötös, akkor a három legkisebb eleméhez a negyedik vagy az ötödik elem hozzávételével nem reguláris diofantoszi számnégyest kapnánk. Bo He, Alain Togbé és Volker Ziegler egy megjelenésre váró cikkben igazolták ezt a sejtést, tehát nincs diofantoszi számötös.

A probléma általánosításai, változatai

Ahogyan láttuk, a diofantoszi számötösökről szóló sejtés bizonyításával a diofantoszi számhalmazokról már majdnem mindent tudunk. A definíció különféle általánosításaival és változataival azonban kifogyhatatlan problémakörhöz jutunk, melyből a teljesség igénye nélkül szemezgetünk néhány eredményt.

ℓ-diofantoszi számhalmazok. Rögtön az első gondolat a definíció módosítására, hogy 1 helyett valamilyen más ℓ egész számot adjunk hozzá az elemek szorzatához. Ennek megfelelően egy legalább kételemű, pozitív egészekből álló A halmazt ℓ-diofantoszi számhalmaznak hívunk, ha minden $a, b \in A$, $a \neq b$ esetén $ab + \ell$ négyzetszám.

Kezdjük annak bizonyításával, hogy ha ℓ 4-gyel osztva 2-t ad maradékul, akkor nem létezik ℓ-diofantoszi számnégyes. Ha ugyanis egy négyelemű, egész számokból álló halmaznak van 4-gyel osztható eleme, akkor annak bármelyik másik elemmel vett szorzata is osztható 4-gyel; ha pedig nincs 4-gyel osztható eleme a halmaznak, akkor a skatulyaelv szerint van két elem, melyek ugyanannyit adnak maradékul 4-gyel osztva, így szorzatuk 4-gyel vett osztási maradéka 0 vagy 1. Tehát mindenképpen található a halmazban két elem, melyek szorzatához ℓ-et adva olyan számhoz jutunk, melynek 4-gyel vett osztási maradéka 2 vagy 3, a négyzetszámok viszont 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhatnak. Érdekesség, hogy ezt a viszonylag egyszerű észrevételt három egymástól független cikkben publikálták, melyek mindegyike 1985-ben jelent meg.

Andrej Dujella 1993-ban megmutatta, hogy ha ℓ 4-gyel osztva nem 2-t ad maradékul és $\ell \notin \{-4, -3, -1, 3, 5, 8, 12, 20\}$, akkor létezik ℓ-diofantoszi számnégyes. A kimaradó nyolc szám esetén viszont jelenleg megválaszolatlan az ℓ-diofantoszi számnégyesek létezésének kérdése. Ugyanakkor azt is igazolta, hogy ha ℓ négyzetszám, akkor végtelen sok ℓ-diofantoszi számnégyes van. Itt kell még megemlíteni, hogy bizonyos ℓ értékekre léteznek ℓ-diofantoszi számötösök és számhatosok, és érdekes módon nem minden ilyen ℓ négyzetszám, például sikerült megadni (-255)-diofantoszi számötöst.

m-edik hatvány diofantoszi számhalmazok. A probléma egy másik általánosításához jutunk, ha a legalább kételemű, pozitív egészekből álló A halmaztól azt várjuk el, hogy minden $a, b \in A$, $a \neq b$ esetén $ab + 1$ négyzetszám helyett teljes m-edik hatvány legyen.

Yann Bugeaud és Andrej Dujella 2003-ban vizsgálták az m-edik hatvány diofantoszi számhalmazokat, és bebizonyították, hogy elemszámuk rendre legfeljebb 7, 5, 4 illetve 3 lehet, ha $m = 3$, $m = 4$, $5 \leq m \leq 176$, $177 \leq m$. Viszont ezek a felső korlátok nem feltétlenül pontosak, sőt $m \geq 5$ esetén még m-edik hatvány diofantoszi számhármast sem ismerünk.

Racionális diofantoszi számhalmazok. A diofantoszi számhalmazok problémája az egész számok helyett vizsgálható a racionális számok körében is, ahogyan azt eredetileg Diophantosz és Euler is tette. Meg kell jegyezni, hogy egy racionális diofantoszi számhalmaz elemeinek d közös nevezőjével megszorozva a számokat egy d^2-diofantoszi számhalmazhoz jutunk, és viszont.

Az első racionális diofantoszi számhatost *Philip Gibbs* találta, 2017-ben pedig Andrej Dujella, *Matija Kazalicki, Miljen Mikić* és *Szikszai Márton* megmutatta, hogy a racionális diofantoszi számhatosok száma végtelen. Azonban azt nem tudjuk, hogy létezik-e nagyobb elemszámú racionális diofantoszi számhalmaz.

Ha a racionális esetben kiegészítjük a definíciót azzal, hogy a halmaz bármely a eleme esetén a^2+1 is egy racionális szám négyzete legyen, azaz a definícióbeli követelményt nem feltétlenül különböző halmazbeli elemek szorzatának 1-gyel történő megnövelésére írjuk elő, akkor az erős racionális diofantoszi számhalmaz fogalmához jutunk. (Az egész számok körében ennek a módosításnak természetesen nincs értelme.) Andrej Dujella és Vinko Petričević 2008-ban igazolták, hogy végtelen sok erős racionális diofantoszi számhármas létezik, de nem ismert, hogy van-e erős racionális diofantoszi számnégyes.

A fent leírt változatok természetesen szabadon kombinálhatók, vagy vizsgálhatók más számhalmazokon, például a Gauss-egészekre (olyan komplex számok, melyeknek valós és képzetes része is egész szám), vagy akár az egész együtthatós polinomok körében, így az ismertetést is végeláthatatlanul folytathatnánk.

Ehelyett zárszóként szeretnénk kiemelni, hogy Dujellának elévülhetetlen érdemei vannak a témakör népszerűsítésében, melyhez számottevő eredményekkel maga is hozzájárult. Valamint honlapján fenntart egy folyamatosan frissülő, teljességre törekvő irodalomjegyzéket is tartalmazó oldalt, melyet jó szívvel ajánlunk az érdeklődők figyelmébe.

Irodalomjegyzék

[1] Andrej Dujella, *Diophantine m-tuples,* https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/dtuples.html.

[2] Andrej Dujella, *What is a Diophantine m-tuple?,* Notices of the American Mathematical Society, **63** (2016), 772–774.