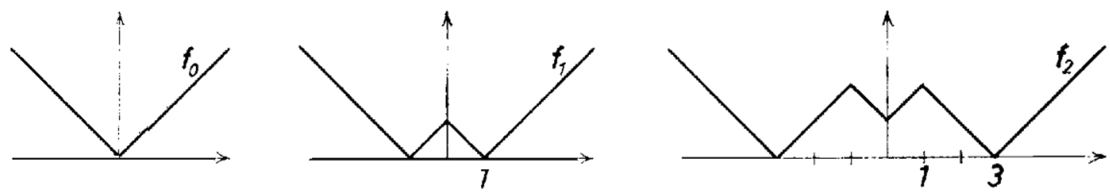
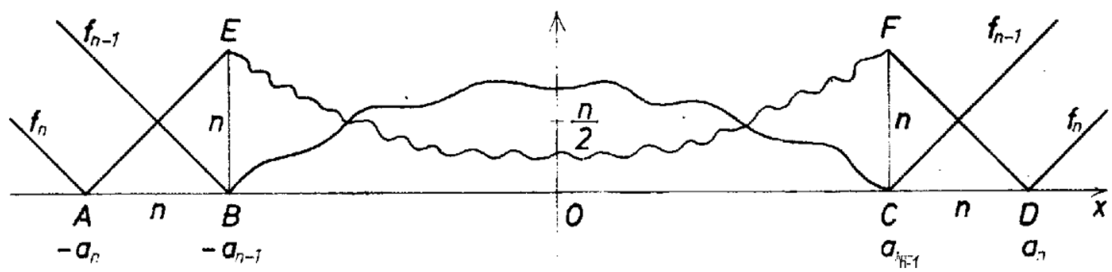
Legyen a keresett terület t_n. Az $n=0,\,1,\,2$ értékekre felrajzolva az f_n függvényt (1. ábra), láthatjuk, hogy $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=7$, továbbá az $a_n=n(n+1)/2$ jelölés mellett a következő állítás igaz $n=0,\,1,\,2$-re:

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} \text{ha} & x\le -a_n, & \text{akkor} & f_n(x)=-x-a_n,\\ \text{ha} & -a_n<x<a_n, & \text{akkor} & 0<f_n(x)\le n;\\ \text{ha} & a_n\le x, & \text{akkor} & f_n(x)=x-a_n. \end{array}$$



1. ábra



2. ábra

Mivel $a_n-a_{n-1}=n$ és $f_n(x)=\left|f_{n-1}(x)-n\right|$, azért ha az (1) állítás igaz $(n-1)$-re, akkor igaz n-re is (2. ábra). Így a teljes indukció elve alapján (1) minden n-re teljesül. A 2. ábra alapján a t_n területet úgy kapjuk meg, hogy az $ADFE$ trapéz területéből levonjuk annak az idomnak a területét, melyet az f_n függvénygörbe E és F pontok közti íve és az EF szakasz határol. De ez nem más, mint az f_{n-1} görbe B és C közti ívének tükörképe az $y=n/2$ egyenesre, tehát a levonandó terület éppen t_{n-1}. A trapéz területe

$$BE\frac{AD+EF}{2}=n(a_n+a_{n-1})=n^3,$$

így $t_n=n^3-t_{n-1}$. Ezt az összefüggést n helyett $(n-1)$, $(n-2)$, ... értékekre felírva, majd váltakozó előjellel összeadva azt kapjuk, hogy páros n esetén

$$(2)\qquad t_n=n^3-(n-1)^3+(n-2)^3+\ldots+2^3-1^3$$

páratlan n esetén pedig

$$(3)\qquad t_n=n^3-(n-1)^3+(n-2)^3+\ldots-2^3+1^3$$

hiszen $t_0=0$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. t_n-re nemcsak a (2), illetve (3) alatti kifejezést, hanem zárt alakot is megadhatunk. Ehhez a következő azonosságból indulunk ki:

$$8n^3=[4n^3+6n^2-1]+[4(n-1)^3+6(n-1)^2-1].$$

Ezt összevetve a $8n^3=8t_n+8t_{n-1}$ összefüggéssel, azt kapjuk, hogy a $8t_n-[4n^3+6n^2-1]$ $(n=0,\,1,\,2,\ldots)$ sorozat szomszédos tagjainak összege 0, s mivel a $8t_n-4n^3+6n^2-1$ kifejezés értéke $n=0$-ra $+1$, azért a sorozat tagjai felváltva $+1$, illetve -1. Ebből kapjuk, hogy $8t_n-[4n^3+6n^2-1]=(-1)^n$, tehát

$$t_n=\frac{4n^3+6n^2-1+(-1)^n}{8}.$$