2017. május 20. és 24. között rendezték meg Észtországban az 1. Európai Fizikai Diákolimpiát, röviden EuPhO-t, ahol Magyarország is képviseltette magát. A versenyre való kiválasztás a Kunfalvi Rezső válogatóverseny alapján zajlott, ahonnan a három legjobb eredményt elért, nem végzős diák került a csapatba (a verseny időpontja ugyanis egybeesett az érettségi vizsgák időpontjával). A csapatot két tanár kísérte: *Vankó Péter* (BME Fizikai Intézet) mint csapatvezető és *Vigh Máté* (ELTE Fizikai Intézet) mint a javító bizottság tagja.

Maga a verseny Tartu városában zajlott, mely Észtország egyik egyetemi központja. Itt alkalmunk volt megnézni a gyönyörű városközpontot és a történelmi jelentőségű tartui obszervatóriumot. A javítás és az eredményhirdetés a fővárosban, Tallinnban történt, ahol lehetőségünk adódott megtekinteni a fantasztikus óvárost.

A versenyen – a Nemzetközi Diákolimpiához hasonlóan – egy elméleti és egy gyakorlati forduló volt, mindkettő öt órás terjedelemben. A szervezők törekedtek rövid, ötletes feladatok kitűzésére, melyek mellőzték a hosszadalmas számolásokat. Az elméleti fordulóban három feladat volt: az első egy kötél rezgéseit vizsgálta, a második egy termodinamikai probléma volt, míg a harmadik feladat egy szupravezető háló és egy mágneses dipólus kölcsönhatásával foglalkozott. A gyakorlati fordulóban egy LED hatásfokát és $U-I$ karakterisztikáját mérték meg a versenyzők a rendelkezésükre álló eszközökkel.

A csapat és eredményeik (a maximális pontszám 50):

Németh Balázs (24,2 pont) *ezüstérem;* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf., felkészítő tanár: *Csefkó Zoltán, Dvorák Cecília;*

Marozsák Tóbiás (23,0 pont) *ezüstérem;* Budapest, Óbudai Árpád Gimnázium, 11. évf., felkészítő tanár: *Mezei István, Gärtner István;*

Simon Dániel Gábor (17,3 pont) *bronzérem;* Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium, 11. évf., felkészítő tanár: *Bakk János.*

A versenyen szerzett pozitív tapasztalatok alapján a résztvevők egyetértettek, hogy folytatják az EuPhO szervezését, így ha minden igaz, jövőre Oroszországban, Moszkvában kerül megrendezésre a 2. EuPhO, ahol reményeink szerint ötfős csapat fogja képviselni hazánkat, akár végzős diákok is.

A továbbiakban ismertetjük az elméleti feladatokat, valamint azok hivatalos megoldását.

1. Rezgő kötél

Egy súlyos, állandó vastagságú, L hosszúságú kötél függőlegesen lóg a mennyezetről. A kötél rezgéseket végezhet az egyensúlyi helyzete körül különböző sajátfrekvenciákkal, amelyeket növekvő sorrendben így jelölünk: f_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Az *1. ábra* egy számítógépes szimuláció alapján a kötél alakját mutatja az első három sajátfrekvencián végzett rezgés esetében. Figyelj arra, hogy az ábrán a vízszintes és a függőleges skála nem egyforma. Felteheted, hogy a kötél kitérése sokkal kisebb a hosszánál (kis amplitúdójú közelítés).

1. ábra

A) *Dolgozz ki egy egyszerűsített modellt, amellyel meg tudod becsülni a kötél alaprezgésének f_1 frekvenciáját! Ez alapján számítsd ki közelítőleg f_1 értékét, ha a kötél hossza $L = 1{,}0$ m. Számolj $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ értékkel.*

B) *Olvasd le a szükséges adatokat az ábráról, és becsüld meg az $f_1 : f_2 : f_3$ frekvenciaarányt!*

Megoldás. A) A *2. ábráról* leolvasható, hogy az első esetben a kötél görbülete elhanyagolható, vagyis kis kitéréseknél közelíthetünk egy fizikai ingával:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}}{\theta}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}mL^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}} = 0{,}61 \text{ Hz}.$$

2. ábra

B) Dimenzióanalízis segítségével megállapítható, hogy a frekvencia csak g-től és L-től függhet, méghozzá a következő módon:

$$f_k = c_k\sqrt{\frac{g}{L}}\,.$$

Itt c_k egy dimenziótlan együttható, mely csupán a k módusszámtól függ. Bejelölve a *2. ábrán* az N pontot világos, hogy az N pont kitérése 0 a mozgás során, így az NB kötélszakasz közelítőleg a kötél alapfrekvenciáján rezeg. Tehát írhatjuk:

$$f_2(L) \equiv f_1(NB) = f_1(L - NA).$$

Ezáltal:

$$\frac{f_2(L)}{f_1(L)} = \frac{f_1(L-NA)}{f_1(L)} = \sqrt{\frac{L}{L-NA}}.$$

A kötél vízszintes kitérése igen kicsiny a hosszához képest, így mérhetjük az NA szakaszt a függőleges tengelyen. Ekkor $NA \approx 0{,}8$ m, $L = 1{,}0$ m, tehát:

$$\frac{f_2}{f_1} \approx 2{,}2.$$

Hasonló gondolatmenetet alkalmazva mint az előbb, lemérhetjük, hogy $N_1A \approx 0{,}6$ m:

$$f_3(L) \equiv f_2(L - N_1A),$$
$$\frac{f_3(L)}{f_2(L)} = \frac{f_2(L-N_1A)}{f_2(L)} = \sqrt{\frac{L}{L-N_1A}} \approx 1{,}6.$$

Ezek szerint

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}\cdot\frac{f_2}{f_1} \approx 3{,}5,$$

így a végeredmény:

$$f_1 : f_2 : f_3 \approx 1 : 2{,}2 : 3{,}5.$$

2. Korong gázban

Tekintsünk egy vékony, lapos, M tömegű, S területű, kezdetben T_1 hőmérsékletű korongot, amely kezdetben a súlytalanság állapotában nyugalomban van egy ϱ sűrűségű, T_0 hőmérsékletű gázban ($T_1 = 1000\,T_0$). A korong egyik oldala hőszigetelő réteggel van bevonva, a másik oldala viszont nagyon jó hőkontaktusban van a környező gázzal: az m tömegű gázmolekulák a felülettel történő egyetlen ütközés során elnyerik a korong hőmérsékletét.

Becsüld meg a korong kezdeti a_0 gyorsulását és a kialakuló mozgás során elért $v_{\max}$ maximális sebességét!

Tedd fel, hogy a korong hőkapacitása Nk_B nagyságrendű, ahol N a benne lévő atomok száma, k_B pedig a Boltzmann-állandó, valamint hogy a gáz és a korong anyagának moláris tömege ugyanakkora nagyságrendű. A molekulák átlagos szabad úthossza (az az átlagos távolság, amit egy molekula két ütközés között megtesz) sokkal nagyobb, mint a korong mérete. Hanyagolj el minden, a korong pereménél fellépő széleffektust.

Megoldás. A gáz által a korong hőszigetelő réteggel bevont oldalára kifejtett nyomás kezdetben $P_0 = nk_BT_0$, ahol n a gáz részecskeszám-sűrűsége. Erre az eredményre a $j_0 \sim v_{x0}$ részecskeáram, valamint az egy molekula által átadott $p_0 = 2mv_{x0}$ impulzus (v_{x0} a molekulák sebességének normál irányú komponense) szorzatának átlagolásával juthatunk ($\overline{2v_{x0}^2} \sim T_0$).

Hasonló gondolatmenetet követve számíthatjuk ki a korong jó hővezető oldalán fellépő nyomást. Itt a részecskeáram-sűrűség az előbbi érték, azonban a molekulánként átadott impulzus nagyobb a teljesen rugalmas ütközés esetéhez képest:

$$p_1 = m(v_{x0} + v_{x1}) \approx mv_{x1},$$

ahol v_{x1} a kontaktust követően a korongtól távolodó molekulák sebességének a felületre merőleges komponense. Ennélfogva a P_1 nyomásra:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\overline{v_{x0}v_{x1}}}{\overline{2v_{x0}^2}} \approx \frac{\sqrt{T_1T_0}}{T_0},$$

ami egy konstans (egy nagyságrendű) szorzótényezőtől eltekintve helyes eredmény.

A korongra ható eredő erő:

$$F = (P_1 - P_0)S \approx Snk_B\sqrt{T_0T_1},$$

így a kezdeti gyorsulás:

$$a_0 \approx \frac{Snk_B}{M}\sqrt{T_0T_1} = \frac{S\varrho k_B}{mM}\sqrt{T_0T_1}.$$

Mivel $P_1 \gg P_0$, a korong gyorsulni fog egészen addig, amíg a sebessége el nem éri a gázmolekulák sebességének nagyságrendjét. Amikor ez bekövetkezik, azaz a korong v sebessége eléri a $v_0 = \sqrt{kT_0/m}$ nagyságrendet, a hátoldalt érő $j(v)$ részecskeáram exponenciális ütemnél is gyorsabban csökkenni kezd, összhangban az ideális gáz molekuláinak sebességeloszlásával (például $j(2v_0) \approx j_0 10^{-3}$, míg $j(3v_0) \approx j_0 10^{-6}$). Hasonló ütemben csökken a korongot előre hajtó P_1 nyomás is, így a korong nem gyorsul tovább. Ennélfogva a korong legnagyobb sebessége:

$$v_{\max} \approx v_0 = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}.$$

Az előzőekben feltettük, hogy a korong nem hűl le jelentősen az említett sebesség eléréséig. Ennek belátásához tekintsük először a hozzávetőleges gyorsulási időt:

$$t_{\mathrm{gy}} \approx \frac{v_{\max}}{a_0} \approx \frac{M\sqrt{mk_B T_0}}{S\varrho k_B\sqrt{T_0 T_1}} = \frac{M}{\varrho S} \Bigg/ \sqrt{\frac{k_B T_1}{m}}.$$

Mivel a hűlést jellemző P_{h} teljesítmény a korong indulásakor maximális, felső becslést adhatunk a hűlés idejére $t_{\mathrm{h}} = \dfrac{Q}{P_h}$ alakban, ahol Q a korong teljes hőmennyisége. A P_{h} teljesítmény becsült értéke:

$$P_{\mathrm{h}} \approx Sj_0 \cdot k_B T_1 \approx Snk_B\sqrt{T_0 T_1}\sqrt{\frac{k_B T_1}{m}},$$

továbbá a teljes hőmennyiség $Q \approx Nk_B T_1$. Felhasználva, hogy $M \approx Nm$, a hűlés idejére a következő adódik:

$$t_{\mathrm{h}} \approx \frac{(M/m)k_B T_1}{Snk_B T_1\sqrt{k_B T_0/m}} = \frac{M}{\varrho S} \Bigg/ \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}.$$

Végül vegyük észre, hogy $t_{\mathrm{gy}}/t_{\mathrm{h}} \approx \sqrt{T_0/T_1} \ll 1$, azaz a korong valóban nem hűl le jelentősen a v_0 sebesség elérése előtt.

3. Szupravezető háló

Tekintsünk egy hálót, amely egy lapos szupravezető lapból úgy készül, hogy abba rácsszerűen, sűrűn egymás mellé kis lyukakat fúrunk. Kezdetben a lap nincs szupravezető állapotban, és egy m dipólmomentumú, a hálótól a távolságban lévő mágneses dipólus merőlegesen a háló felé mutat. Ekkor a hálót lehűtjük, és így szupravezetővé válik. Ezután a dipólust a felületre merőleges irányban elmozdítjuk úgy, hogy az új távolsága a hálótól b legyen.

Határozd meg a háló és a dipólus közt fellépő erőt! A lyukrács rácsállandója (a lyukak egymástól mért távolsága) sokkal kisebb, mint a és b, a lap lineáris mérete viszont sokkal nagyobb, mint a és b.

Megoldás. A megoldás kulcsa az, hogy észrevegyük: a mágneses fluxus „beszorul" a szupravezető hálóba. Mindenekelőtt ezt a hatást gondoljuk meg. Miután a hálót szupravezető állapotúra hűtjük, a mágneses mező minden helyen „állandósul", nem változhat meg, akárhogyan is mozgatjuk a mágneses dipólust. Mivel a mágneses mező jól meghatározott a háló mentén, a feladat igazából egy határfeltétel-probléma, amit általában tükörtöltésekkel szoktunk megoldani.

Nézzük meg, mit történik, ha a dipólust eltávolítjuk a hálótól nagyon messzire. El kell helyeznünk egy tükördipólust, ami pont ugyanazt a mágneses mezőt hozza létre a háló mentén, mint az eredeti mágnes. Ezt megoldhatjuk egy dipólussal, amely a távolságra van a háló mögött, és szintén m a dipólmomentuma. Most hozzuk vissza az eredeti dipólust b távolságra a hálótól. Ennek a mezejét viszont ki kell zárnunk a szupravezető hálóból, ezt egy $-m$ momentumú, a háló mögött b távolságra lévő dipólussal tehetjük meg.

A továbbiakban a tükördipólusok által a dipólusra ható erőt kell meghatároznunk. Ezt például a mágneses és az elektromos dipólusok közötti analógia felhasználásával tehetjük meg. A mágneses dipólusokra egymáshoz nagyon közeli, q_m és $-q_m$ nagyságú „mágneses töltésekként" is gondolhatunk, amelyek egymástól d távolságra vannak, ahol $m = q_m d$.

Határozzuk meg a dipólus mágneses térerősségét a dipólus tengelye mentén, a dipólustól $x \gg d$ távolságban:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{x^2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-q_m}{(x+d)^2} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{x^2} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{x^2}\left(1 - 2\frac{d}{x}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q_m d}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{x^3}.$$

Most vizsgáljuk meg az x helyen lévő dipólusra ható erő nagyságát egy inhomogén, $B(x)$ helyfüggésű mágneses mezőben:

$$F = -q_m B(x) + q_m B(x+d),$$

amit kifejezhetünk $B(x)$ deriváltja segítségével is:

$$F \approx -q_m B(x) + q_m \left(B(x) + d \cdot \left. \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} \right|_x \right) = q_m d \left(-\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^4} \right) = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{m^2}{x^4}.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy két párhuzamos dipólus vonzza egymást.

Visszatérve a feladathoz, a b távolságra lévő dipólust vonzza a $-a$ távolságra lévő dipólus, de taszítja a $-b$ távolságra lévő. Vagyis az eredő erő:

$$F = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{m^2}{(a+b)^4} + \frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{m^2}{(b+b)^4} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi} \left(\frac{1}{16b^4} - \frac{1}{(a+b)^4} \right),$$

ahol a negatív előjel azt jelenti, hogy a dipólus vonzást érez a háló felé.

Izgalmas megnézni azt az esetet, ha b és a közel egyenlőek, vagyis $b = a + \delta$ ($\delta \ll a$). Ebben az esetben

$$F = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi} \left(\frac{1}{16(a+\delta)^4} - \frac{1}{(2a+\delta)^4} \right),$$

vagyis

$$F \approx \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi} \frac{1}{16a^4} \left(\left(1 - 4\frac{\delta}{a} \right) - \left(1 - 4\frac{\delta/2}{a} \right) \right),$$

ami tovább egyszerűsödik:

$$F \approx -\frac{3\mu_0 m^2}{16\pi a^5} \delta.$$

A negatív előjel miatt ez az erő $\delta > 0$ esetén a háló felé mutat. A pozitív δ itt azt jelenti, hogy távolítjuk a dipólust a hálótól. Látható, hogy az F erő *lineárisan* változik a hely függvényében, tehát ha kicsit kimozdítjuk a dipólust az eredeti (egyensúlyi) helyzetéből, akkor – egyéb erők hiányában – harmonikus rezgőmozgást fog végezni.