I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:*
a)

$$\sqrt{5^{x-1}} = \sqrt[3]{0{,}2^{4x-20{,}5}},$$

(*5 pont*)

b)

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin x.$$

(*6 pont*)

Megoldás. *a*) A hatványozás azonosságainak felhasználásával: $5^{\frac{x-1}{2}} = 5^{\frac{20,5-4x}{3}}$. Az 5-ös alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{20{,}5-4x}{3}$, melynek megoldása $x = 4$.

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartomány ($x \in \mathbb{R}$) feltüntetése mellett az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

b) *I. megoldás.* A $\sin x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ összefüggést felhasználva

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Tudjuk, hogy $\cos\alpha = \cos\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha = \pm\beta + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Ha $\alpha = \beta + 2k\pi$, akkor $x - \dfrac{5\pi}{6} = x - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), melynek nincs megoldása.

Ha $\alpha = -\beta + 2k\pi$, akkor $x - \dfrac{5\pi}{6} = -x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahonnan $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az értelmezési tartomány ($x \in \mathbb{R}$) felírása mellett az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

II. megoldás. Az addíciós tételt felhasználva

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{5\pi}{6} + \sin x \cdot \sin\frac{5\pi}{6},$$

így az egyenlet

$$\cos x \cdot \cos\frac{5\pi}{6} + \sin x \cdot \sin\frac{5\pi}{6} = \sin x$$

alakba írható, melyet rendezve a

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

egyenlethez jutunk.

Mivel nincs olyan x, amelyre $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre 0 lenne, ezért az egyenletnek nem lehet olyan gyöke, amelyre $\cos x = 0$, így az egyenlet mindkét oldalát $\dfrac{1}{2}\cos x$-szel osztva $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, ahonnan $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartomány ($x \in \mathbb{R}$) felírása mellett az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

2. *Egy bank* 500 000 Ft *kedvezményes kölcsönösszeget kínál fix* 16 181 Ft*-os heti törlesztő részlettel,* 42 *hetes futamidőre. A szerződési feltételek értelmében az aktuális törlesztő részletet az ügyfél minden héten péntekig köteles átutalni a bank számlájára. Tudjuk, hogy az ügyfél által hetente elutalt összegeket a bank* 0,5%*-os azonnali kamatos kamatra tudja újra befektetni. (A kamatot a befizetéskor azonnal jóváírják.)*

a) *A felvett kölcsönösszeg hány százalékát fizeti vissza az ügyfél a banknak?* (*3 pont*)

b) *Mekkora tényleges nyereséget ér el a bank ezzel a hitellel egy-egy ügyfélen?* (*6 pont*)

A televízióban az egyik csatornán átlagosan minden negyedik hirdetés valamilyen hitelt reklámoz. Egy néző egy 12 *reklámból álló reklámblokkban* 4 *hirdetést véletlenszerűen megnéz.*

c) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül legalább kettő hitelt reklámoz?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Az ügyfél által a 42 hét alatt visszafizetett összeg $42 \cdot 16\,181 = 679\,602$ Ft, mely a felvett kölcsönösszeg $\dfrac{679\,602}{500\,000} \cdot 100 = 135{,}9204 \approx 136\%$-a.

b) Az első törlesztést követően a bank pénze:

$$T_1 = 16\,181 \cdot \left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right) = 16\,181 \cdot 1{,}005 \text{ Ft},$$

a második törlesztést követően:

$$T_2 = (16\,181 \cdot 1{,}005 + 16\,181) \cdot 1{,}005 = 16\,181 \cdot 1{,}005^2 + 16\,181 \cdot 1{,}005 \text{ Ft},$$

$$\vdots$$

míg a 42. törlesztést követően:

$$T_{42} = 16\,181 \cdot 1{,}005^{42} + 16\,181 \cdot 1{,}005^{41} + \ldots + 16\,181 \cdot 1{,}005 \text{ Ft}.$$

A 42. heti törlesztést követően kapott összeget így is írhatjuk:

$$T_{42} = 16\,181 \cdot \left(1{,}005^{42} + 1{,}005^{41} + \ldots + 1{,}005\right).$$

A zárójelben egy mértani sorozat első 42 tagjának összege szerepel, melynek első tagja $a_1 = 1{,}005$, hányadosa $q = 1{,}005$. Ezt az összeget S_{42}-vel jelölve:

$$S_{42} = 1{,}005 \cdot \frac{1{,}005^{42} - 1}{1{,}005 - 1} \approx 46{,}84.$$

Tehát a bank tényleges nyeresége $16\,181 \cdot S_{42} - 500\,000 \approx 258\,000$ Ft.

c) *I. megoldás.* Annak a valószínűsége, hogy egy reklám hitelt reklámoz 0,25.

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül egyik sem hirdet hitelt: $\binom{4}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^4$ ($\approx 0{,}3164$).

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül pontosan egy reklám hirdet hitelt: $\binom{4}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^3$ ($\approx 0{,}4219$).

Így a kérdéses valószínűség: $p = 1 - 0{,}75^4 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 \approx 0{,}2617$.

II. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy egy reklám hitelt reklámoz 0,25.

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül pontosan kettő reklámoz hitelt: $\binom{4}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2$ ($\approx 0{,}2109$).

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül pontosan három reklámoz hitelt: $\binom{4}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^1$ ($\approx 0{,}0469$).

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül mind hitelt reklámoz: $\binom{4}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^0$ ($\approx 0{,}0039$).

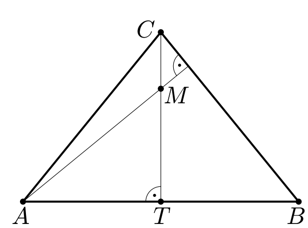
A kérdéses valószínűség az előbbi valószínűségek összege, így a keresett valószínűség kb. 0,2617.

3. *Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontja a háromszög alaphoz tartozó magasságának súlyponttól különböző harmadoló pontja.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy a háromszög alapjának fele éppen a magasságpont alaptól vett távolságának és az alaphoz tartozó magasság hosszának mértani közepe.* *(7 pont)*

b) *Számítsuk ki a háromszög belső szögeinek nagyságát.* *(5 pont)*

Megoldás. *a*) Jelölje az egyenlő szárú háromszög magasságpontját M, az alaphoz tartozó magasság talppontját T.



A BC oldalhoz tartozó magasságot megrajzolva az ACT háromszög hasonló lesz az MAT háromszöghöz, mert $MTA\sphericalangle = CTA\sphericalangle$ és $MAT\sphericalangle = ACT\sphericalangle$. A hasonlóság miatt $\dfrac{MT}{AT} = \dfrac{AT}{CT}$, melyet rendezve $AT = \sqrt{MT \cdot CT}$ $(AT > 0)$.

Tehát a háromszög alapjának fele valóban a feladat szerinti szakaszok mértani közepe.

b) Legyen az egyenlő szárú háromszög alapjának hossza a, magasságának hossza m. Az ACT és MAT háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{\frac{2}{3}m}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{m}, \quad \text{melyből} \quad \frac{m}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (a, m > 0).$$

Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeit β-val, szárszögét γ-val jelölve a BCT derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{m}{\frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{m}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \text{ahonnan} \quad \beta \approx 50{,}77^\circ.$$

A háromszög szárszöge $\gamma = 180^\circ - 2\beta \approx 78{,}46^\circ$.

4. *Az alábbi táblázatban a tavalyi kézilabda NB I-ben szereplő női csapatok alapszakasz végén elért pontszáma látható.*

Csapat száma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Szerzett pont	41	41	31	31	28	20	20	19	15	9	5	4

a) Adjuk meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis).

- *Az alapszakaszban átlagosan* 22 *pontot értek el a csapatok.*
- *Az elért pontszámok szórása egészre kerekítve* 12 *pont.* (*3 pont*)

Az alapszakasz vége után a négy legtöbb pontot elérő csapat a felsőházban, a négy legkevesebb pontot elérő csapat az alsóházban, míg a többi csapat a középházban folytatta küzdelmeit.

b) Igaz-e az a megállapítás, hogy az egyes „házakban” lévő csapatok pontszámainak a mediántól vett átlagos abszolút eltéréseinek összege megegyezik az alapszakaszban résztvevő összes csapat pontszámának a legkisebb módusztól vett átlagos abszolút eltérésével? (*5 pont*)

A kézilabda mérkőzéseken győzelem esetén 2*, döntetlen esetén* 1*, vereség esetén* 0 *pontot kapnak a csapatok. Az egyik csapatnak a* 10*. forduló után csak* 11 *pontja volt.*

c) Hányféleképpen érhette el a csapat a 11 *pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el azt?* (*6 pont*)

Megoldás. *a)* A szerzett pontok átlaga:

$$\overline{x}=\frac{2\cdot 41+2\cdot 31+28+2\cdot 20+19+15+9+5+4}{12}=\frac{264}{12}=22,$$

tehát az első állítás igaz.

A szerzett pontok szórása:

$$\sigma=\sqrt{\frac{2\cdot(41-22)^2+2\cdot(31-22)^2+\ldots+(5-22)^2+(4-22)^2}{12}}=\sqrt{\frac{1768}{12}}\approx 12,$$

tehát a második állítás is igaz.

b) Az elért pontszámokat monoton növekvő sorba rendezve az adatok mediánja a két középső elem számtani közepe, vagyis 20 lesz.

A legkisebb leggyakrabban előforduló elem (módusz) szintén a 20.

A mediántól vett eltérések a felső-, közép- és alsóházban rendre: 21, 21, 11, 11, 8, 0, 0, 1, 5, 11, 15, 16.

Az eltérések átlaga a felső-, közép- és alsóházban rendre 16, $\frac{9}{4}$, $\frac{47}{4}$, melyek összege 30.

A módusztól vett eltérések megegyeznek a mediántól vett eltérésekkel, melyek átlaga 10.

Tehát a megállapítás hamis.

c) A csapat 10 forduló után a 11 pontot a pontszámokat tekintve ötféleképpen érhette el: 2-2-2-2-2-1-0-0-0-0; 2-2-2-2-1-1-1-0-0-0; 2-2-2-1-1-1-1-1-0-0; 2-2-1-1-1-1-1-1-1-0; 2-1-1-1-1-1-1-1-1-1.

Ha azt is figyelembe vesszük, hogy a 11 pontot milyen sorrendben érte el, akkor a lehetőségek száma az ismétléses permutáció segítségével rendre $\frac{10!}{5!\cdot 4!}$; $\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}$; $\frac{10!}{3!\cdot 5!\cdot 2!}$; $\frac{10!}{2!\cdot 7!}$; $\frac{10!}{9!}$.

Az összes lehetőség száma az előbbi lehetőségek összege, vagyis

$$\frac{10!}{5!\cdot 4!}+\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}+\frac{10!}{3!\cdot 5!\cdot 2!}+\frac{10!}{2!\cdot 7!}+\frac{10!}{9!}=1\,260+4\,200+2\,520+360+10=8\,350.$$

A csapat 10 forduló után 8350-féleképpen érhette el a 11 pontot.

II. rész

5. *Adott az* $y=-x^2+3x+3$ *egyenletű parabola.*

a) Adjuk meg a parabola tengelypontjának koordinátáit. (*3 pont*)

b) Számítsuk ki a megadott parabola $x-2y=1$ *egyenletű egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát.* (*6 pont*)

c) Írja fel a parabola azon érintőjének egyenletét, amely párhuzamos a parabola 3 *és* 4 *abszcisszájú pontjait összekötő szakasszal.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Az adott egyenlet jobb oldalát teljes négyzetté alakítva:

$$y = -x^2 + 3x + 3 = -\left[x^2 - 3x\right] + 3 = -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 3 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4},$$

ahonnan a tengelypont koordinátái $T\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{4}\right)$.

b) A húr két végpontjának koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldásai adják:

$$y = -x^2 + 3x + 3,$$
$$1 = x - 2y.$$

A második egyenletből x-et kifejezve, majd a kapott kifejezést a parabola egyenletébe behelyettesítve rendezés után a $-4y^2 + y + 5 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei $y_1 = -1$ és $y_2 = \frac{5}{4}$.

A húr végpontjainak koordinátái $A(-1; -1)$ és $B\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{4}\right)$, melyből a húr hossza

$$h = \sqrt{\left(\frac{7}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{5}{4} + 1\right)^2} = \frac{9}{4}\sqrt{5} \approx 5{,}03 \text{ egység.}$$

c) A parabola 3 és 4 abszcisszájú pontjainak koordinátái $P(3; 3)$ és $Q(4; -1)$. A P és Q pontokon áthaladó egyenes meredeksége a $\overrightarrow{PQ}(1; -4)$ irányvektorból $m = -4$. Mivel a keresett érintő párhuzamos a PQ egyenessel, ezért az érintő egyenlete $y = -4x + b$ alakú, ahol b értékét keressük.

Az előbbi alakban megadott egyenesek közül az lesz érintő, melynek egy közös pontja van a megadott parabolával, tehát az alábbi egyenletrendszernek csak egy számpár megoldása lehet:

$$y = -x^2 + 3x + 3,$$
$$y = -4x + b.$$

A két jobb oldali kifejezés egyenlőségéből az $x^2 - 7x + b - 3 = 0$ paraméteres másodfokú egyenletet kapjuk, melynek pontosan akkor van egy darab valós gyöke, ha a diszkriminánsa 0, azaz ha $(-7)^2 - 4(b - 3) = 0$, ahonnan $b = \frac{61}{4}$.

A keresett érintő egyenlete: $y = -4x + \frac{61}{4}$.

6. *Egy városban hat tömegközlekedési csomópont található. Az egyes csomópontokból a többi csomópontba bizonyos számú közvetlen járat vezet (két csomópont között csak egy közvetlen járat megy). A csomópontokból induló járatok számának szorzata 60. A közlekedési társaság ellenőrei szeretnének a csomópontok közötti összes vonalon jegyellenőrzést tartani. Az ellenőrök valamelyik csomópontból közösen indulnak, elmennek egy másik csomópontig, majd onnan együtt tovább utaznak egy következőbe.*

a) A fenti módszert folytatva meg tudják-e úgy szervezni a csomópontok közötti ellenőrzést, hogy minden vonalon pontosan egyszer utazzanak? (*8 pont*)

Az egyik állomás mozgólépcsőjén állva egy utas 40 *másodperc alatt ér le a föld felszínéről a föld alatti peronra. Ugyanezt az utat* 55 *másodperc alatt teszi meg, ha a mozgólépcső nem működik és ő azon egyenletes tempóban lefelé gyalogol.*

b) Mennyi idő alatt ér le az utas a peronra, ha a mozgólépcső működik, és közben ő azon egyenletesen sétál lefelé? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje az egyes közlekedési csomópontokból induló közvetlen járatok számát rendre a, b, c, d, e és f. Ekkor a feladat szövege szerint $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = 60$.

A közvetlen járatok számának meghatározásához bontsuk prímtényezők szorzatára a 60-at: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. A csomópontokat és azok közötti közvetlen járatokat egyszerű gráffal szemléltetve megállapítható, hogy a gráfban az egyes pontok fokszáma legfeljebb 5 lehet, ezért a csúcsok fokszámai csak a következők lehetnek: 1, 1, 2, 2, 3, 5 vagy 1, 1, 1, 3, 4, 5. Utóbbi a fokszámtétel miatt nem lehetséges, előbbi viszont igen, ekkor létezik a feladat feltételeinek megfelelő gráf.

A feladatban említett csomópontok közötti ellenőrzést pontosan akkor tudnák végrehajtani az ellenőrök, ha gráfunknak lenne Euler-vonala, ami az Euler-tétel szerint nem lehetséges, így az ellenőrzés a megadott feltételekkel nem végrehajtható.

b) Jelölje a mozgólépcső hosszát méterben l, a kérdéses időt pedig másodpercben t^*. Az $s = v \cdot t$ összefüggést felhasználva, a feladat szövege alapján az alábbi táblázat készíthető:

	út	idő	sebesség
ha a vásárló áll és a mozgólépcső működik	l	40	$\frac{l}{40}$
ha a mozgólépcső nem működik, és a vásárló sétál	l	55	$\frac{l}{55}$
ha a mozgólépcső működik, és a vásárló sétál	l	t^*	$\frac{l}{40}+\frac{l}{55}$

A kérdéses időt a táblázat utolsó sorából felírva:

$$t^* = \frac{s}{v} = \frac{l}{\frac{l}{40}+\frac{l}{55}} = \frac{l}{\frac{19l}{440}} = \frac{440}{19} \approx 23{,}16 \text{ másodperc.}$$

Tehát az utas kb. 23 másodperc alatt ér le a peronra, ha a mozgólépcső működik és ő azon egyenletesen sétál lefelé.

7. *Egy egyetem közlekedésmérnök szakos hallgatói egy lámpa nélküli forgalmas gyalogátkelőhely mellett figyelik az autósok megállási szokásait. Egy hétfői napon egy adott időszakban a zebrán áthaladó járművek* 16%*-a busz,* 24%*-a motor,* 40%*-a személygépkocsi volt, a többi esetben pedig más jármű haladt át a zebrán. Megfigyelték, hogy a buszsofőrök az esetek* 80%*-ában, a személygépkocsik vezetői* 65%*-ban, a motorosoké* 60%*-ban, míg a többi járművezető* 75%*-ban áll meg a zebra előtt.*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha egy gyalogos lelép a zebrára, megáll a zebra előtt közlekedő jármű? (*6 pont*)

Zsuzsa nénit a zebrán majdnem elütötte egy jármű, ami nem állt meg.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a jármű motor volt? (*7 pont*)

A sok baleset miatt a hatóság úgy döntött, hogy jelzőlámpát szerelnek fel a gyalogátkelőhelyhez, mely reggel 6 *óra és este* 8 *óra között* 2 *perc* 15 *másodpercenként vált zöldre. Este* 8 *órától reggel* 6 *óráig a lámpa nem működik, ekkor sárgán villog.*

c) Hányszor vált zöldre a lámpa egy nap alatt, ha az első váltás mindig a bekapcsoláskor, pontban 6 *órakor történik?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje A azt az eseményt, hogy a zebra előtt közlekedő jármű megáll, B_1, B_2, B_3 és B_4 pedig rendre azt, hogy a zebra elé érkező jármű busz, motor, személygépkocsi, illetve más. Ekkor a feladat szövege alapján: $P(A \mid B_1) = 0{,}8$, $P(A \mid B_2) = 0{,}6$, $P(A \mid B_3) = 0{,}65$, $P(A \mid B_4) = 0{,}75$, valamint $P(B_1) = 0{,}16$, $P(B_2) = 0{,}24$, $P(B_3) = 0{,}4$, $P(B_4) = 0{,}2$.

A feladat szerint $P(A)$ valószínűségét keressük, melynek értéke:

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}16 + 0{,}6 \cdot 0{,}24 + 0{,}65 \cdot 0{,}4 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 = 0{,}682.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a zebra előtt közlekedő jármű megáll 0,682.

b) *I. megoldás.* A feladat szövege alapján a következő feltételes valószínűségeket írhatjuk fel:

$$P(\overline{A} \mid B_1) = 0{,}2, \quad P(\overline{A} \mid B_2) = 0{,}4, \quad P(\overline{A} \mid B_3) = 0{,}35, \quad P(\overline{A} \mid B_4) = 0{,}25.$$

A Bayes-tétel alapján annak a valószínűsége, hogy a meg nem álló jármű motor volt:

$$P(B_2 \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \mid B_2) \cdot P(B_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(\overline{A} \mid B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}24}{0{,}2 \cdot 0{,}16 + 0{,}4 \cdot 0{,}24 + 0{,}35 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}2} \approx 0{,}3019.$$

Tehát a keresett valószínűség kb. 0,3019.

II. megoldás. Tekintsünk 1000 db zebrán áthaladó járművet. Ekkor a járművek között 160 db busz, 240 db motor, 400 db személygépkocsi és 200 db más van. A feladat szövege alapján a meg nem álló buszok, motorok, személygépkocsik és más járművek száma rendre 32, 96, 140 és 50. A meg nem álló motorosok száma 96, mely az összes meg nem álló jármű $\frac{96}{32+96+140+50} = \frac{96}{318} \approx 0{,}3019$-ed része.

A kiszámított arány független a konkrét darabszámtól, az csupán az eloszlástól függ, így a keresett valószínűség kb. 0,3019.

c) Reggel 6 és este 8 óra között 14 óra, azaz 840 perc telik el. A lámpa 2,25 percenként vált zöldre, így a megadott időintervallumban a zöldre váltások száma:

$$n = \left[\frac{840}{2{,}25}\right] + 1 = 374.$$

8. *Kovács úr az újonnan épített házába az ábrán látható félköríves ablakot szeretné beépíteni. Az ablak félköríves része opálüvegből készült, mely egységnyi felületen feleannyi fényt enged át, mint a tisztán átlátszó téglalap alakú rész.*

Az ABCD téglalap, amibe az ablakot beilleszti 6 méter *kerületű. Milyen széles és magas a beépített ablak, ha az a lehető legtöbb fényt engedi be a lakásba?* *(16 pont)*

I. megoldás. Az ablak tisztán átlátszó téglalap alakú részének szélességét a-val, magasságát b-vel jelölve az $ABCD$ téglalap kerülete $3a + 2b = 6$. Mivel az ablakon átjövő fény mennyisége egyenesen arányos a felülettel, ezért a

$$V(a;b) = 2ab + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi}{2}$$

függvény maximumát keressük. A $3a+2b = 6$ kifejezésből $b = 3-\frac{3}{2}a$ helyettesítéssel a világosságot megadó másodfokú függvény

$$V(a) = -3a^2 + \frac{a^2}{8}\pi + 6a,$$

melynek zérushelyei $a_1 = 0$ és $a_2 = \frac{6}{3-\frac{\pi}{8}}$.

Mivel V főegyütthatója negatív, ezért függvényünknek valóban maximuma lesz, melyet a zérushelyek számtani közepénél vesz fel. A V függvény maximumhelye tehát $a = \frac{6}{6-\frac{\pi}{4}} \approx 1{,}15$ m. a értékét a $b = 3 - \frac{3}{2}a$ összefüggésbe visszahelyettesítve $b \approx 1{,}27$ (m).

A beépített ablak tehát kb. 115 cm széles és kb. 185 cm magas.

II. megoldás. Az ablak tisztán átlátszó téglalap alakú részének szélességét a-val, magasságát b-vel jelölve az $ABCD$ téglalap kerülete $3a + 2b = 6$. Mivel az ablakon átjövő fény mennyisége egyenesen arányos a felülettel, ezért a

$$V(a;b) = 2ab + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi}{2}$$

függvény maximumát keressük. A $3a + 2b = 6$ kifejezésből $b = 3 - \frac{3}{2}a$ helyettesítéssel a világosságot megadó függvény

$$V(a) = 6a - 3a^2 + \frac{a^2}{8}\pi$$

alakba írható, melynek akkor lehet szélsőértéke, ha első deriváltja 0. A függvényt deriválva $V'(a) = 6 - 6a + a\frac{\pi}{4}$, melyből

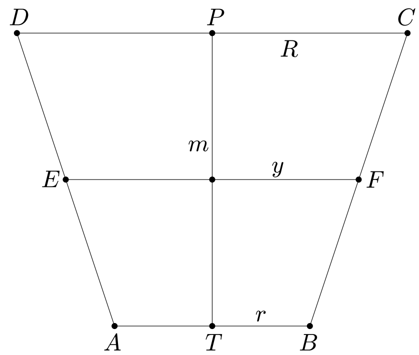
$$a = \frac{6}{6-\frac{\pi}{4}} \approx 1{,}15 \text{ m}.$$

Az $a = \frac{6}{6-\frac{\pi}{4}}$ helyen V' előjelet $(+ \rightarrow -)$ vált, tehát V-nek a-ban valóban maximuma van. a értékét a $b = 3 - \frac{3}{2}a$ összefüggésbe visszahelyettesítve $b \approx 1{,}27$ (m).

A beépített ablak tehát kb. 115 cm széles és kb. 185 cm magas.

9. *Egy hazai gyorsétterem csonkakúp alakú kávéspohárban szolgálja fel a kávét. A* 9 cm *magas pohárba magassága feléig töltik a presszókávét, melyet zárható, hőálló fedéllel látnak el, hogy a kávé biztosan ne tudjon kiborulni. A pohár alsó, kisebbik alapkörének belső átmérője* 4,5 cm, *míg a felső, nagyobbé* 7 cm. *Milyen magasan lesz a pohárban a kávé, ha a poharat megfordítva a nagyobb alapjára állítjuk?* *(16 pont)*

Megoldás. Készítsünk síkmetszetet a csonkakúp alakú kávéspohárról, majd számítsuk ki a kávé térfogatát (*1. ábra*).

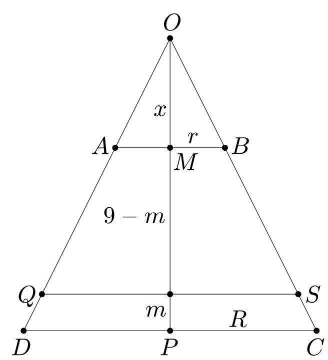


1. ábra

A pohárban lévő kávé térfogata a csonkakúp térfogatának képletéből:

$$V_{\text{kávé}} = \frac{\left(r^2 + y^2 + r \cdot y\right) \cdot m \cdot \pi}{6} = \frac{\left(2{,}25^2 + 2{,}875^2 + 2{,}25 \cdot 2{,}875\right) \cdot 9 \cdot \pi}{6} \approx 93{,}3 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ha a poharat megfordítjuk, azaz a nagyobb alapjára állítjuk, a kávé térfogata nem változik, így a megfelelő térfogatok felírása után meghatározható a keresett magasság. Egészítsük ki a megfordított csonkakúpot forgáskúppá, készítsünk síkmetszetet, majd számítsuk ki az egyes részek térfogatait (*2. ábra*).



2. ábra

Az OMB háromszög hasonló az OPC háromszöghöz, mert megfelelő szögeik egyenlők. A kiegészítő kiskúp magasságát x-szel jelölve a hasonlóság miatt $\frac{x}{r} = \frac{x+9}{R}$, vagyis $\frac{x}{2{,}25} = \frac{x+9}{3{,}5}$, ahonnan $x = 16{,}2$ (cm).

A kiegészítő kiskúp térfogata az előbbiek szerint:

$$V_{\text{kiskúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot x}{3} = \frac{2{,}25^2 \cdot \pi \cdot 16{,}2}{3} \approx 85{,}9 \text{ (cm}^3\text{)},$$

a teljes forgáskúp térfogata:

$$V_{\text{teljes}} = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot (x+9)}{3} = \frac{3{,}5^2 \cdot \pi \cdot 25{,}2}{3} \approx 323{,}3 \text{ (cm}^3\text{)},$$

melyekből a pohár térfogata $V_{\text{pohár}} = V_{\text{teljes}} - V_{\text{kiskúp}} \approx 237{,}4$ (cm^3).

Ha a pohár térfogatából kivonjuk a kávé térfogatát, megkapjuk a kimaradó rész térfogatát, ami $V_{\text{kimaradó}} = V_{\text{pohár}} - V_{\text{kávé}} \approx 144{,}1$ (cm^3).

A kávé magasságának meghatározásához használjuk a hasonló testek térfogatának arányára vonatkozó tételt. A kiegészítő kiskúp középpontosan hasonló ahhoz a forgáskúphoz, amelyet úgy kapunk, hogy a teljes forgáskúpból elhagyjuk a kávét tartalmazó részt, így a térfogatok arányát felírva

$$\frac{V_{\text{kiskúp}}}{V_{\text{kiskúp+kimaradó}}} = \left(\frac{16{,}2}{25{,}2 - m}\right)^3, \quad \text{melyből} \quad m \approx 2{,}7 \text{ cm}.$$

Tehát a megfordított pohárban kb. 2,7 cm magasan áll a kávé.