I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*
a) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$, (*3 pont*)
b) $2\sqrt{1-\cos^2 x}=\operatorname{tg} x$. (*7 pont*)

Megoldás. *a)*

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-6x+9}&=3-x,\\ \sqrt{(3-x)^2}&=3-x,\\ |3-x|&=3-x.\end{aligned}$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $3-x\ge 0$, azaz $x\le 3$. Tehát az egyenlet megoldása minden 3-nál nem nagyobb valós szám.

b)

$$\begin{aligned}2\sqrt{1-\cos^2 x}&=\operatorname{tg} x,\\ 2\sqrt{\sin^2 x}&=\frac{\sin x}{\cos x},\\ 2|\sin x|&=\frac{\sin x}{\cos x},\\ 2|\sin x|-\frac{\sin x}{\cos x}&=0.\end{aligned}$$

Ha $\sin x\ge 0$, azaz

$$(*) \qquad 2k\pi\le x\le \pi+2k\pi,$$

ahol $k\in\mathbb{Z}$, akkor

$$\begin{aligned}2\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}&=0,\\ \sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)&=0,\\ \sin x=0,\quad \text{vagy}\quad \cos x&=0{,}5.\end{aligned}$$

A $(*)$ feltételt is figyelembe véve $x=k\pi$, vagy $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

Ha $\sin x<0$, azaz

$$(**) \qquad \pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi,$$

ahol $k\in\mathbb{Z}$, akkor

$$\begin{aligned}-2\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}&=0,\\ -\sin x\left(2+\frac{1}{\cos x}\right)&=0,\\ \sin x=0,\quad \text{vagy}\quad \cos x&=-0{,}5.\end{aligned}$$

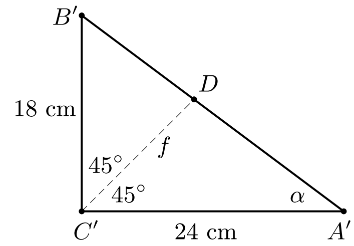
A $(**)$ feltételt is figyelembe véve $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

2. *Az ABC derékszögű háromszög befogói $BC=6$ cm és $AC=8$ cm. A hozzá hasonló $A'B'C'$ háromszög $A'B'$ átfogója* 30 cm. *Mekkora az $A'B'C'$ háromszög területe, a C' csúcsból induló magassága, súlyvonala és szögfelezője?* (*12 pont*)

Megoldás.

Az ABC háromszög átfogója 10 cm, területe $t=24\ \text{cm}^2$. Ezért a nagyítás aránya $k=3$. Így az $A'B'C'$ területe $t'=k^2\cdot t=216\ \text{cm}^2$.

$$m_{c'}=\frac{2t'}{c'}=\frac{2\cdot 216\ \text{cm}^2}{30\ \text{cm}}=\frac{216}{15}\ \text{cm}=14{,}4\ \text{cm},\qquad s_{c'}=\frac{c'}{2}=15\ \text{cm}.$$



Az f szögfelezőt az $A'DC'$ és $B'DC'$ háromszögek területének felhasználásával számoljuk ki:

$$\begin{aligned}&T_{A'B'C'\triangle} = T_{A'DC'\triangle} + T_{B'DC'\triangle} =\\ &= \frac{1}{2}\cdot f\cdot 24\text{ cm}\cdot\sin 45^\circ + \frac{1}{2}\cdot f\cdot 18\text{ cm}\cdot\sin 45^\circ =\\ &= 216\text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Ebből

$$f = \frac{2\cdot 216\text{ cm}^2}{42\text{ cm}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{216\cdot\sqrt{2}}{21}\text{ cm} \approx 14{,}55\text{ cm}.$$

II. megoldás a szögfelező kiszámítására. Az $A'B'C'$ háromszögben $\sin\alpha = \frac{18}{30} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 36{,}87^\circ$. $C'DA'\sphericalangle = 180^\circ - (45^\circ + \alpha) = 98{,}13^\circ$.

Az $A'DC'$ háromszögben $\frac{f}{24\text{ cm}} = \frac{\sin 36{,}87^\circ}{\sin 98{,}13^\circ}$. Ebből $f \approx 14{,}55$ cm.

III. megoldás a szögfelező kiszámítására. Szögfelező tétel szerint $B'D : DA' = 18 : 24$. Ebből $B'D = 90/7$ cm.

Koszinusztétel a $B'DC'$ háromszögben: $(90/7)^2 = f^2 + 18^2 - 2f\cdot 18\cos 45^\circ$. Ennek két megoldása $f_1 = 14{,}55$ cm és $f_2 = 10{,}91$ cm. Csak az első a jó megoldás, mert f nem lehet kisebb m_c-nél.

3. *Oldjuk meg a valós számok halmazán:*

a) $x^2 + 3 \geq 4x$, *(3 pont)*

b) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x} \geq 0$, *(3 pont)*

c) $x^2 - 4x + \frac{3}{(x-2)^2} = 0$. *(9 pont)*

Megoldás. *a)* Az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény két zérushelye $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $f(x) \geq 0$, ha $x \leq 1$, vagy $x \geq 3$.

b) Az értelmezési tartomány: $x \neq 0$. A tört nemnegatív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű, illetve ha a számláló 0. Ez $0 < x \leq 1$, illetve $x \geq 3$ esetén teljesül.

c) Értelmezési tartomány:

$$x \neq 2. \tag{$*$}$$

Legyen $y = (x-2)^2$, ekkor $x^2 - 4x = y - 4$, az egyenlet

$$y - 4 + \frac{3}{y} = 0 \quad\Rightarrow\quad y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Ennek megoldásai $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. A hozzájuk tartozó x-ek: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2+\sqrt{3}$, $x_4 = 2-\sqrt{3}$. Az $y = (x-2)^2$-tel való beszorzás kivételével a lépések ekvivalens átalakítások voltak. A kapott gyökök nem esnek egybe $(*)$-gal, ezért mind a négy gyök jó.

Második megoldás a *c)* feladatra:

$$x^2 - 4x + \frac{3}{(x-2)^2} = 0,$$

$$x^2 - 4x + \frac{3}{x^2 - 4x + 4} = 0.$$

A nevezővel beszorozva:

$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 3 = 0.$$

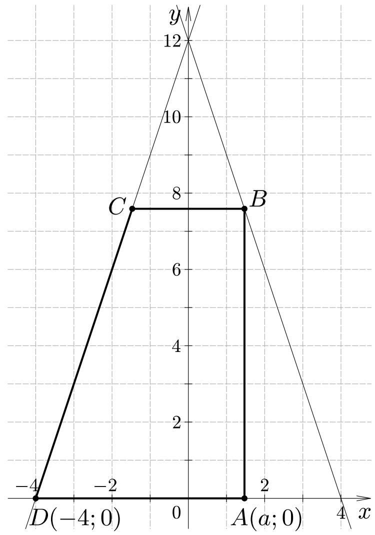
Észrevéve, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$ megoldások, az egyenlet szorzattá alakítható:

$$(x-1)(x-3)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0.$$

Az $x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenlet megoldásai $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 2 - \sqrt{3}$.

A kapott gyökök jók.

4. *Az $y = 3x + 12$, az $y = -3x + 12$ egyenesek és az x tengely által határolt háromszögbe az* ábra *szerint az $ABCD$ derékszögű trapézt írjuk. Hogyan válasszuk meg az $A(a; 0)$ pontot, hogy a trapéz területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?* *(14 pont)*



Megoldás. A B pont illeszkedik az $y = -3x + 12$ egyenesre, ezért koordinátái: $B(a; 12 - 3a)$, a többi csúcs $C(-a; 12 - 3a)$ és $D(-4; 0)$.

A trapéz alapjai $4 + a$ és $2a$, magassága $12 - 3a$, ezért területe

$$(*) \qquad t = \frac{(4 + 3a)(12 - 3a)}{2}.$$

A számlálóban a két tényező összege állandó, ezért a számtani és mértani közép összefüggése szerint:

$$t = \frac{(4 + 3a)(12 - 3a)}{2} \le \frac{\left(\frac{4+3a+12-3a}{2}\right)^2}{2} = 32.$$

Látható, hogy t nem lehet nagyobb 32-nél, ennyi akkor és csak akkor lehet, ha $4 + 3a = 12 - 3a \ \Rightarrow\ a = 4/3$. Tehát $a = 4/3$ esetén lesz a trapéz területe a legnagyobb, ennek értéke $t = 32$.

Második megoldás $(*)$**-tól.**

$$t = \frac{(4 + 3a)(12 - 3a)}{2} = -\frac{9}{2}a^2 + 12a + 24 = -\frac{9}{2}\left(a^2 - \frac{8}{3}a\right) + 24 =$$
$$= -\frac{9}{2}\left[\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right] + 24 = -\frac{9}{2}\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + 32.$$

$-\frac{9}{2}\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 \le 0$, ezért t nem lehet nagyobb 32-nél, ennyi akkor és csak akkor lehet, ha $a = 4/3$.

Harmadik megoldás $(*)$**-tól.** A

$$t(a) = \frac{(4 + 3a)(12 - 3a)}{2} = \left(-\frac{9}{2}a^2 + 12a + 24\right)$$

másodfokú függvény két zérushelye a szorzat alakból könnyen leolvasható: $a_1 = -\frac{4}{3}$ és $a_2 = 4$. A függvény szélsőértéke a két zérushely számtani közepénél, $a = \frac{4}{3}$-nál van, $t\left(\frac{4}{3}\right) = 32$. Mivel ez pozitív, ezért ez t maximuma. (Vagy azért van itt maximum, mert a polinom alakból látható, hogy a másodfokú tag együtthatója negatív.)

Negyedik megoldás $(*)$**-tól.**

$$t(a) = \frac{(4 + 3a)(12 - 3a)}{2} = -\frac{9}{2}a^2 + 12a + 24.$$

$t'(a) = -9a + 12$. Ennek zérushelye $a = 4/3$-nál van.

Mivel a $t(a)$ másodfokú függvényben a másodfokú tag előjele negatív, ezért a derivált zérushelyénél a függvénynek maximuma van. Ennek értéke $t\left(\frac{4}{3}\right) = 32$.

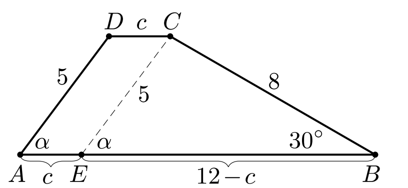
II. rész

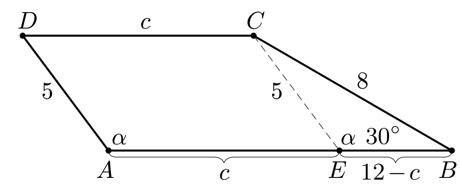
5. *Az $ABCD$ trapéz AB alapja* 12 cm, *a szárak:* $BC = 8$ cm *és* $DA = 5$ cm. *Az ABC szög* $30°$*-os. Mekkora a CD oldal, és a trapéz többi szöge? A CD oldal hosszát* cm*-ben, a szögeket fokokban, két tizedes jegy pontossággal adjuk meg.* (*16 pont*)

Megoldás. A CBE háromszögben $\frac{\sin\alpha}{\sin 30°} = \frac{8}{5}$. Ebből $\sin\alpha = 0{,}8$, $\alpha_1 = 53{,}13°$, vagy $\alpha_2 = 126{,}87°$. Mindkettő jó megoldás.

A hozzájuk tartozó ECB szög: ha $\alpha = 53{,}13°$, akkor $ADC\sphericalangle = 126{,}87°$, $DCB\sphericalangle = 150°$,

$$\frac{12-c}{5} = \frac{\sin 96{,}87°}{\sin 30°} \implies c = 2{,}07 \text{ cm}.$$





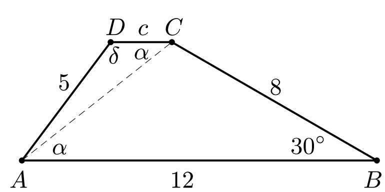
Ha $\alpha = 126{,}87°$, akkor $ADC\sphericalangle = 53{,}13°$, $DCB\sphericalangle = 150°$,

$$\frac{12-c}{5} = \frac{\sin 23{,}13°}{\sin 30°} \implies c = 8{,}07 \text{ cm}.$$

Második megoldás. Az ABC háromszögből koszinusztétellel:

$$CA = \sqrt{41{,}72} = 6{,}46 \text{ cm}.$$

Szinusztétellel $\frac{\sin\alpha}{\sin 30°} = \frac{8}{6{,}46}$, $\sin\alpha = 0{,}6193$.



Mivel α nem a legnagyobb oldallal van szemben, ezért csak hegyesszög lehet:

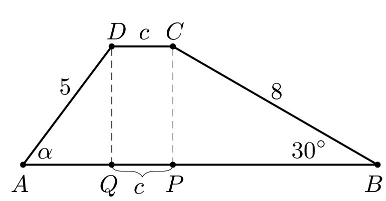
$$\alpha = CAB\sphericalangle = 38{,}26° = ACD\sphericalangle.$$

Az ADC háromszögből szinusztétellel $\frac{\sin\delta}{\sin 38{,}26°} = \frac{6{,}46}{5}$, $\sin\delta = 0{,}8$.

Nagyobb oldallal szemben hegyes- és tompaszög is lehet: $ADC\sphericalangle = 126{,}87°$, $DAB\sphericalangle = 53{,}13°$, $DAC\sphericalangle = 14{,}87°$, újabb szinusztétellel $c_1 = 2{,}07$ cm, $DCB\sphericalangle = 150°$.

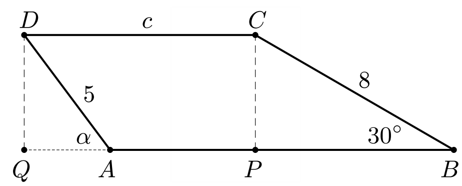
$ADC\sphericalangle = 53{,}13°$, $DAB\sphericalangle = 126{,}87°$, $DAC\sphericalangle = 88{,}61°$, újabb szinusztétellel $c_2 = 8{,}07$ cm, $DCB\sphericalangle = 150°$.

Harmadik megoldás. A trapézt magasságaival egy téglalapra és két derékszögű háromszögre bontjuk. Itt egyszerűbbek a számítások, de előre tudni kell, hogy két megoldás lehet.



I.

$$PC = 8 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ cm},$$
$$PB = 8 \text{ cm} \cdot \cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ cm},$$
$$DQ = CP = 4 \text{ cm} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; AQ = \sqrt{5^5 - 4^2} = 3 \text{ cm},$$
$$c = QP = 12 \text{ cm} - 6{,}93 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = \\ = 2{,}07 \text{ cm},$$
$$\sin BAD\sphericalangle = 4/5 \;\Rightarrow\; \alpha = 53{,}13^\circ,$$
$$ADC\sphericalangle = 126{,}87^\circ, \quad DCB\sphericalangle = 150^\circ.$$



II.

$$PC = 8 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ cm},$$
$$PB = 8 \text{ cm} \cdot \cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ cm},$$
$$DQ = CP = 4 \text{ cm} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; AQ = \sqrt{5^5 - 4^2} = 3 \text{ cm},$$
$$c = QP = 12 \text{ cm} + 3 \text{ cm} - 6{,}93 \text{ cm} = \\ = 8{,}07 \text{ cm},$$
$$\sin QAD\sphericalangle = 4/5 \;\Rightarrow\; \alpha = 53{,}13^\circ = ADC\sphericalangle,$$
$$DAB\sphericalangle = 126{,}87^\circ, \quad DCB\sphericalangle = 150^\circ.$$

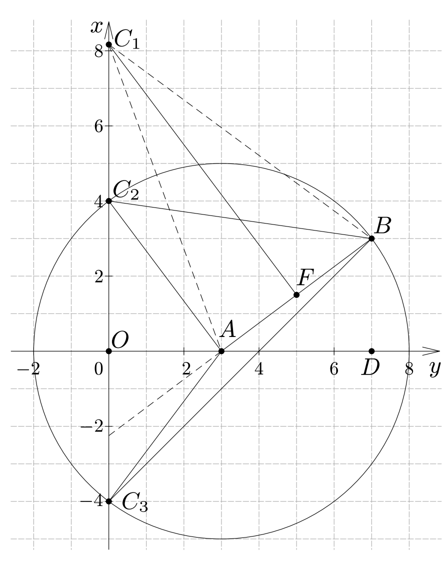
6. *A pozitív körüljárású, egyenlő szárú ABC háromszög két csúcsa $A(3;0)$ és $B(7;3)$. A C csúcs az y tengelyen van. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit, és a háromszög területét.* *(16 pont)*

Megoldás.

Ha $CA = CB$, akkor C illeszkedik AB felező merőlegesére.

$$F(5;1{,}5), \quad \overrightarrow{AB}(4;3) \implies f_{AB}\colon 4x + 3y = 24{,}5.$$

Ennek az y tengelyen levő pontja $C_1\left(0;\dfrac{49}{6}\right)$.



$AB = 5$. Ha $AC = AB = 5$, akkor C illeszkedik az A középpontú 5 sugarú $(x-3)^2 + y^2 = 25$ körre. Ennek az y tengelyen levő pontjai $C_2(0;4)$ és $C_3(0;-4)$.

C_3 esetén nem pozitív körüljárású a háromszög.

B és az y tengely távolsága 7, ezért $BC = BA$ nem lehet.

$$FC_1 = \frac{25}{3}, \quad \text{így} \quad T_{ABC_1} = \frac{5 \cdot \frac{25}{3}}{2} = \frac{125}{6}.$$

$\overrightarrow{AB}(4;3)$, $\overrightarrow{AC_2}(-3;4)$, szorzatuk 0, ezért az ABC_2 háromszög derékszögű,

$$T_{ABC_2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}.$$

Megjegyzés. Lehet az ABC_1 és ABC_2 háromszögek területét úgy is számolni, hogy az $ODBC_1$, illetve az $ODBC_2$ derékszögű trapéz területéből levonjuk a megfelelő derékszögű háromszögek területét.

7. *Az a paraméter mely értékei esetén van pontosan egy megoldása a következő egyenletnek?*

$$25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0. \tag{1}$$

(*16 pont*)

Megoldás. Legyen $t = 5^x$.

(1)-nek akkor és csak akkor van pontosan egy gyöke, ha a $t^2 - (a-1)t + 2a + 3 = 0$ egyenletnek

a) egy gyöke van és az pozitív, vagy

b) két gyöke van és azok közül pontosan egy pozitív.

a) $D = a^2 - 10a - 11 = 0$,

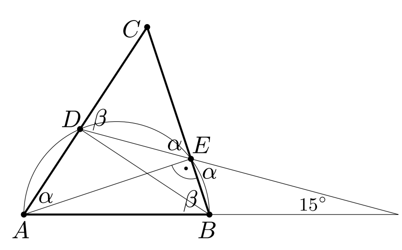
ebből $a = -1$, ekkor $t = -1$, ez nem jó,
vagy $a = 11$, ekkor $t = 5$, ez jó, (1)-ből $x = 1$.

b) $D > 0$ és $2a + 3 < 0$ esetén t-re egy pozitív és egy negatív gyök van.

$D > 0$, ha $a < -1$, vagy $a > 11$. $2a + 3 < 0$, ha $a < -3/2$.
Ennek közös része $a < -3/2$.

Ha $2a + 3 = 0$, akkor az egyik gyök $t_1 = 0$, de a másik negatív, ezért ez nem lehet.
Tehát (1)-nek pontosan egy gyöke van, ha $a = 11$, vagy $a < -3/2$.

8. *Az ABC háromszög AB oldala, mint átmérő köré írt kör az AC és BC oldalakat a D és E pontokban metszi. A DE egyenes felezi az ABC háromszög területét, és az AB egyenessel* $15°$*-os szöget zár be. Mekkorák az ABC háromszög szögei?* (*16 pont*)



Megoldás. $ABED$ húrnégyszög, ezért $DEC\sphericalangle = DAB\sphericalangle$ és $CDE\sphericalangle = ABE\sphericalangle$, így $EDC\triangle \sim ABC\triangle$.

Ha $T_{EDC\triangle} = 1/2 \cdot T_{ABC\triangle}$, akkor a hasonlóság aránya $1/\sqrt{2}$. Ezért a két hasonló háromszögben pl. a β szöggel szemközti oldalak aránya $1/\sqrt{2}$, így az AEC derékszögű háromszögben a CE befogó $1/\sqrt{2}$-szöröse az AC átfogónak, emiatt $ECA\sphericalangle = 45°$.

Az $ABC\triangle$-ben $\alpha + \beta = 135°$, β pedig a $BEF\triangle$ külső szöge, ezért $\beta = \alpha + 15°$. Ezekből $\alpha = 60°$ és $\beta = 75°$.

9. *a*) *Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben kétféle számjegy szerepel, és mindegyik kétszer?* (*3 pont*)

b) *Ha az ilyen típusú számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, akkor mennyi a valószínűsége, hogy 4-gyel osztható számot választunk?* (*6 pont*)

c) *Mely n természetes szám, és x és y számjegyekre lesz*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \overline{xyxy}\,?$$

(*7 pont*)

Megoldás. Az első számjeggyel megegyezhet a 2., a 3., illetve a 4. jegy, ezért háromféle lehet az adott tulajdonságú szám: $\overline{xxyy}$, $\overline{xyxy}$ és $\overline{xyyx}$ alakú. Ezekben x értéke nem lehet 0, ezért 9-féle lehet. y lehet 0, de $y \neq x$, ezért y is 9-féle lehet, tehát mindegyik típusból 81, összesen 243 megfelelő szám van.

b) Egy négyjegyű szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyből álló szám osztható 4-gyel.

Az $\overline{xxyy}$ típusú számok 00-ra, 44-re vagy 88-ra végződhetnek. A 00-ra végződők előtt 9 féle x jegy, a 44-re vagy 88-ra végződők előtt 8-8 féle x állhat, tehát összesen 25 megfelelő szám van.

$\overline{xyxy}$ akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha $\overline{xy}$ osztható 4-gyel, és $x \neq 0$. 12-től 96-ig összesen 22 néggyel osztható szám van, de ezek közül a 44 és a 88 nem jó, tehát összesen 20 db megfelelő szám van.

$\overline{xyyx}$ akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha $\overline{yx}$ osztható 4-gyel, és $x \neq 0$.

$\overline{yx}$ 04-től 96-ig összesen 24 féle lehet, de ezek közül a 20, 40, 44, 60, 80 és a 88 nem jó, tehát összesen 18 db megfelelő szám van.

Tehát annak a valószínűsége, hogy 4-gyel osztható számot kapunk:

$$p = \frac{25+20+18}{243} = \frac{63}{243} = \frac{7}{27} \approx 0{,}259.$$

c) $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Ez akkor lesz négyjegyű, ha $45 \leq n \leq 140$.

$$\overline{xyxy} = 1000x + 100y + 10x + y = 101(10x+y).$$

Az $n(n+1) = 2 \cdot 101(10x+y)$ egyenlet megoldásait keressük, ahol $45 \leq n \leq 140$.

A jobb oldal osztható a 101 prímszámmal, ezért n vagy $n+1$ is osztható vele. Az adott intervallumban csak $n = 101$, vagy $n+1 = 101$ lehet. Mindkettő jó megoldást ad.

$n = 101$ esetén $1+2+3+\ldots+101 = 5151$, tehát $x = 5$, $y = 1$.

$n = 100$ esetén $1+2+3+\ldots+100 = 5050$, tehát $x = 5$, $y = 0$.