A Bernoulli-egyenlőtlenséget *Jacob Bernoulli* svájci matematikus állította fel. Ez az egyenlőtlenség a matematika egyik legfontosabb tétele, számos összefüggés bizonyításában szerepel segédtételként. Az egyenlőtlenség az alábbi alakú:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \tag{1}$$

ahol $1+x>0$, azaz $x>-1$ valós szám, és n tetszőleges *pozitív egész szám* ($n \in \mathbb{N}^+$). Egyenlőséget akkor kapunk, ha $n=1$ vagy $x=0$.

Egy egyszerű bizonyítás. A bizonyítás előnye, hogy nem igényel komoly matematikai ismereteket, elegendő csupán a *mértani sorozat összegképletének* ismerete, ami viszont középszintű érettségin is követelmény.

Vegyük az $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$, $\dots$, $a_n=1$ n elemű sorozatot. Ezt tekinthetjük olyan számtani sorozatnak, melynél a különbség $d=0$, vagy olyan mértani sorozatnak is, amelynél a hányados $q=1$. A sorozat első n elemének összege n. Ha azonban a mértani sorozatnak tekintett fenti sorozat esetén a hányados értékét $x \geq 0$ értékkel megnöveljük, akkor $q=1+x \geq 1$ lesz. A mértani sorozatnak – a változatlan elsőt kivéve – mindegyik eleme, így a sorozat összege is növekedni fog, tehát a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{1 \cdot \left[(1+x)^n - 1\right]}{(1+x)-1} \geq n,$$

amelyből rendezés után éppen a Bernoulli-egyenlőtlenség adódik.

Ha $-1<x<0$, akkor $0<q=1+x<1$, vagyis a mértani sorozat csökkenő, így a fentiekkel megegyező gondolatmenet alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)-1} \leq n,$$

amelyből rendezés után ismét az (1) egyenlőtlenség adódik. (Az egyenlőtlenség iránya azért fordul meg, mert a tört eltüntetésekor az egyenlőtlenség mindkét oldalát x-el kell szorozni, melynek a feltétel szerinti értéke negatív szám.)

A Bernoulli-egyenlőtlenséget ezzel minden megengedett x-re bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Az egyenlőtlenség egy másik, leginkább elterjedt, teljes indukciót használó bizonyítása megtalálható itt:

https://hu.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-egyenl%C5%91tlens%C3%A9g.

2. Több KöMaL feladat megoldásában is lehetett használni a Bernoulli-egyenlőtlenséget. Például:

B. 4715. Adjuk meg az összes pozitív egész számokból álló (a,b) számpárt, amelyre $a^{(b^2)}=b^a$ teljesül.
Megoldás:

https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4715&l=hu.

F. 3264. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x-re

$$\left(1+\frac{[x]}{x}\right)^x \geq 2^{[x]}.$$

Megoldás:

http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=42706.

3. A cikk eredeti formájában megtalálható itt:

http://picaso.hu/matematika.