Hősünkről éppen öt éve, a KöMaL **B. 4419.** feladatában hallottunk utoljára [K]:

Kassza Blanka, szenvedélyes szerencsejátékos tegnap 20 000 *forintot dobált bele egy félkarú rabló gépbe, amit ráadásul a családja tudta nélkül, a kosztpénzből vett kölcsön. Hogy a dolog ne tudódjon ki, ma a családi kasszából magához veszi a maradék* 40 000 *forintot is, és ismét meglátogatja a kaszinót, ahol leül az egyik rulettasztalhoz. Mivel nem akar túl sokat kockáztatni, minden menetben a pirosra vagy a feketére tesz* 1000 *forintot. Ha nyer, aminek* 18/37 *az esélye, akkor* 1000 *forinttal gazdagodik, különben elveszíti a feltett pénzt. Akkor hagyja abba a játékot, ha sikerül összesen* 60 000 *forintot összegyűjtenie – ebben az esetben otthon hiánytalanul visszateheti a pénzt a helyére – vagy pedig mindenét elveszíti. Mekkora a valószínűsége, hogy Kassza Blankának sikerül a* 60 000 *forintot összegyűjtenie?* (KöMaL **B. 4419.** feladat, 2012. január)

Kassza Blanka sorsát azóta sűrű csönd övezte – talán átmenetileg jó útra tért – de idén, év elején újra febukkant, nem is akárhol, hanem a `police.hu` híreiben [P]:

A Bács-Kiskun Megyei Rendőr-főkapitányság Gazdaságvédelmi Osztálya csalás bűntett elkövetésének megalapozott gyanúja miatt 2017. január 5-én őrizetbe vett egy 35 éves kecskeméti lakost. A férfi a rendelkezésre álló bizonyítékok alapján megalapozottan gyanúsítható azzal, hogy 2016 szeptemberében és októberében az egyik bank tanácsadójaként előre eltervezve, a bank információs rendszerébe valótlan adatokat vitt be, illetve egyéb műveletek elvégzésével az információs rendszer működését befolyásolta. Pénztárosként a nap elején fiktív befizetéseket könyvelt le az ügyfelek számláira, ezeket a nap folyamán az ügyfelek nevében külföldi számlákra utalta. Az így megszerzett pénz felhasználásával online szerencsejáték-oldalakon fogadott, majd a nap végén – mivel nem nyert és nem tudta visszatenni az ellopott pénzt – sztornózta a reggeli befizetéseket, így több mint 58 millió forint kárt okozott a banknak.

A híradásokból sajnos nem derül ki, hogy az illető milyen szerencsejátékot játszott milyen tétekkel, mint ahogy az sem, sikerült-e még időben a felesége nevére íratnia a hűtőszekrényt. Volt portál, amely a hírt egy rulettkerék képével illusztrálta, azt sugallva, hogy rulettezett [I], egy másik portál egy pókerasztal képével próbálta színesíteni [N]. A továbbiakban feltételezzük, hogy Kassza Blanka ezúttal is rulettezett, és minden menetben a feketére vagy a pirosra téve próbált valamilyen előre meghatározott összeget összegyűjteni.

Tippeljünk!

Mielőtt elkezdenénk valószínűségeket számítani, álljunk meg, és tippeljünk:

1. Hány százalék esélye van Kassza Blankának a **B. 4419.** feladatban elérnie a 60 000 ezer forintot?

2. Tegyük fel, hogy leülünk rulettezni k egység pénzzel, minden körben felteszünk 1 egységet a pirosra vagy a feketére, és egészen addig játszunk, míg vagy elfogy minden pénzünk, vagy elérjük a 100 egységnyi pénzt. Melyik az a legkisebb $0 \le k \le 100$ egész szám, amellyel már 50 százaléknál magasabb az esélyünk arra, hogy hamarabb érjük el a 100 egységet, mint hogy elfogy a pénzünk?

A 2. kérdést Keleti Tamás tette fel egy Facebook-posztban, azzal a kikötéssel, hogy csak tippelni szabad, legfeljebb fejben szabad számolni [F]. A hallgatóság, amelyben matematikusok is rész vettek, a következő tippeket adta:

2, 35, 51, 53, 55, 56, 60, 61, 65, 67, 71, 72, 74, 75, 78, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 95, 96, 97, 100, 101.

Mivel a kérdések nagyon hasonlóak, csak a kiinduló pénz mennyiségében és a célként kitűzött nyeremény nagyságában különböznek, gyorsan betűzzük meg a kiszámítandó mennyiségeinket.

(a) Jelölje $p(k,n)$ annak a valószínűségét, hogy k egység pénzzel indulva, előbb érjük el az n egységnyi vagyont, mint a 0 egységet;

(b) Jelölje $\ell(k,n)$ a várható lépésszámot addig, amíg elérjük az n vagy a 0 egység valamelyikét.

A **B. 4419.** feladatban 1000 forint az egység, tehát $p(40,60)$ értéke a kérdés, a 2. kérdésben pedig a legkisebb olyan k, amelyre $p(k,100) > \frac{1}{2}$.

A kérdések életszerűségéhez tartozik, hogy a várható lépésszámok ne legyenek túl magasak – senki nem lenne képes mondjuk 10^8 menetet együltében végigjátszani. Ezért az $\ell(k,n)$ értékét is ki fogjuk számítani.

És ha soha nem ér véget a játék?

A játékunk egy *véletlen bolyongás*. Két forduló között összesen $(n+1)$-féle állapotunk lehet, és ezeket leírhatjuk egyetlen, 0 és n közötti egész számmal: azzal, hogy mennyi pénzünk van. A bolyongás a k állapotból indul, a 0 vagy az n állapotban véget ér. $0 < m < n$ esetén az m állapotból vagy $\frac{18}{37}$ valószínűséggel az $(m+1)$ állapotba, vagy $\frac{19}{37}$ valószínűséggel az $(m-1)$ állapotba lépünk, és ezek az események függetlenek a játék korábbi menetétől.

A bolyongásnak valójában háromféle kimenetele lehetséges. Lehetséges ugyanis, hogy soha nem érjük el sem a 0, sem az n egységet. Megmutatjuk, hogy ennek a valószínűsége 0.

A bolyongás közben felváltva lépünk páros és páratlan értékekre. Ha N lépés után az m értékre érkezünk, akkor szükséges, hogy $N+k-m$ páros legyen; ehhez összesen $\frac{N-k+m}{2}$ alkalommal kell felfelé, és $\frac{N+k-m}{2}$ alkalommal kell lefelé lépnünk. Az ilyen lépéssorozatok száma nem lehet nagyobb, mint $\binom{N}{(N-k+m)/2}$, de ebbe beleszámolhattunk olyan sorozatokat is, amikor a bolyongás közben elhagyjuk a $[1,n-1]$ intervallumot. Ezzel ne törődjünk; sőt, az is elég lesz, ha az összes N hosszú fel/le sorozat számával, 2^N-nel becsülünk felülről. Tehát, annak valószínűségére, hogy a bolyongás soha nem ér véget, bármilyen N pozitív egész esetén felírhatjuk a következő becslést:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{a bolyongás soha nem ér véget}) \le \\
&\le P(\text{a bolyongás nem ér véget } N \text{ lépés alatt}) \le \\
&\le \sum_{\substack{0<m<n \\ N+k-m \text{ páros}}} \binom{N}{\frac{N-k+m}{2}} \left(\frac{19}{37}\right)^{\frac{N-k+m}{2}} \left(\frac{18}{37}\right)^{\frac{N+k-m}{2}} < \\
&< n\cdot 2^N \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{\frac{N-n}{2}} \left(\frac{18}{37}\right)^{\frac{N-n}{2}} = 2^n n \cdot \left(4\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}\right)^{\frac{N-n}{2}} = \\
&= 2^n n \cdot \left(\frac{1368}{1369}\right)^{\frac{N-n}{2}}.
\end{aligned}
$$

A $2^n n$ szám rögzített, és az utolsó hatványkitevő ∞-hez tart, ha $N\to\infty$. Ezért

$$0 \le P(\text{a bolyongás soha nem ér véget}) \le \lim_{N\to\infty}\left(2^n n\cdot\left(\frac{1368}{1369}\right)^{\frac{N-n}{2}}\right) = 0.$$

Tehát tényleg 0 a valószínűsége annak, hogy a játék soha nem ér véget.

1. megoldás – egyenletrendszerrel

Amikor a játék során éppen $0<m<n$ egységünk van, a következő játékban ez $\frac{18}{37}$ valószínűséggel $(m+1)$-re növekszik, illetve $\frac{19}{37}$ valószínűséggel $(m-1)$-re csökken. A $m+1$, illetve $m-1$ egységgel folytatva $p(m+1,n)$, illetve $p(m-1,n)$ eséllyel érjük el az n egységnyi pénzt, tehát

$$p(m,n) = \frac{18}{37}p(m+1,n) + \frac{19}{37}p(m-1,n), \quad \text{ha } m=1,2,\ldots,n-1. \tag{1}$$

Ezen kívül 0 egységgel semmi esélyünk; ha pedig már n egységünk van, akkor játék nélkül, biztosan elértük a célt, így

$$p(0,n)=0 \quad \text{és} \quad p(n,n)=1. \tag{2}$$

Az (1) egy lineáris egyenletrendszert ad a most még ismeretlen $p(1,n),p(2,n),\ldots,p(n-1,n)$ számokra; ezt szeretnénk valamilyen barátságos formában megoldani.

Legyen $m=0,1,\ldots,n-1$ esetén $d_m = p(m+1,n)-p(m,n)$, avagy $p(m,n)=d_0+d_1+\ldots+d_{m-1}$, és alakítsuk át az (1) egyenletet a következőképpen:

$$
\begin{gathered}
(18+19)p(m,n) = 18p(m+1,n) + 19p(m-1,n), \\
18d_{m-1} = 18\big(p(m,n)-p(m-1,n)\big) = 19\big(p(m+1,n)-p(m,n)\big) = 19d_m, \\
d_m = \frac{19}{18}d_{m-1}.
\end{gathered} \tag{1'}
$$

Az (1′) egyenlet szerint az $d_1,d_2,\ldots,d_n$ számok egy $\frac{19}{18}$ hányadosú mértani sorozatot alkotnak, így $d_m = \left(\frac{19}{18}\right)^m d_0$. A (2) egyenletből és a mértani sorozat összegképletéből

$$p(k,n) = \frac{p(k,n)}{p(n,n)} = \frac{d_0+d_1+\ldots+d_{k-1}}{d_0+d_1+\ldots+d_{n-1}} = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k-1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n-1}.$$

A várható lépésszám meghatározásához felírhatunk egy, az (1)-hez hasonló összefüggést: m pénzzel indulva, 1 játék után $\frac{18}{37}$ eséllyel $m+1$ egységünk lesz, és várhatóan további $\ell(m+1,n)$ játékot játszunk, vagy pedig $\frac{19}{37}$ eséllyel $m-1$ egységünk lesz, és várhatóan további $\ell(m-1,n)$ játékot játszunk. Ezért

$$\ell(m,n) = 1 + \frac{18}{37}\ell(m+1,n) + \frac{19}{37}\ell(m-1,n), \quad \text{ha } m = 1,2,\dots,n-1. \tag{3}$$

Ha 0 vagy n egységünk van, akkor többé már nem játszunk, vagyis

$$\ell(0,n) = \ell(n,n) = 0. \tag{4}$$

A (3) egyenlet hasonlít az (1)-re; a plusz 1 taggal úgy bánunk el, hogy $\ell(m,n)$-ből kivonunk egy lineáris kifejezést: valamilyen c konstanssal legyen $t(m,n) = \ell(m,n) - cm$. Ezt behelyettesítve (3)-ba,

$$t(m,n) + cm = 1 + \frac{18}{37}\big(t(m+1,n) + c(m+1)\big) + \frac{19}{37}\big(t(m-1,n) + c(m-1)\big),$$
$$t(m,n) = \frac{18}{37}t(m+1,n) + \frac{19}{37}t(m-1,n) + \Big(1 - \frac{c}{37}\Big).$$

Kézenfekvő a c számot úgy választanunk, hogy az utolsó tag, $1 - \frac{c}{37}$ kiessen, ez a $c = 37$ választással lehetséges. A (4) egyenletet is átírjuk; az új egyenletrendszerünk:

$$t(m,n) = \frac{18}{37}t(m+1,n) + \frac{19}{37}t(m-1,n), \quad \text{ha } m = 1,2,\dots,n-1; \tag{3'}$$

$$t(0,n) = 0, \quad t(n,n) = -37n. \tag{4'}$$

Ez viszont pontosan az (1)–(2) egyenletrendszer $(-37n)$-szerese, így

$$t(k,n) = -37n \cdot p(k,n) = -37n \cdot \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n - 1},$$

és végül

$$\ell(k,n) = p(k,n) + 37k = 37k - 37n \cdot \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n - 1}.$$

A $p(k,n)$ és $\ell(k,n)$ értéke néhány konkrét esetben:

k	n	$p(k,n)$	$\ell(k,n)$
40	60	0,3123	786,66
87	100	0,4929	1395,32
88	100	0,5205	1330,08
987	1000	0,4952	18198,07
988	1000	0,5227	17217,24

Ezek szerint az 1. kérdésre a válasz $p(40,60) \approx 0{,}3123$, vagyis Kassza Blankának körülbelül 31,23% esélye van, és várhatóan 786,66 menetet rulettezik. A 2. kérdésben $k = 88$ (!!) a legkisebb kezdő pénzmennyiség, amellyel indulva 50%-nál nagyobb esélyünk van a 100 egység elérésére, mint a teljes csődre. Figyelemre méltó, hogy tetszőlegesen nagy kezdő pénzzel is 50%-nál alacsonyabb az esélyünk arra, hogy még 13 egység pénzt nyerjünk:

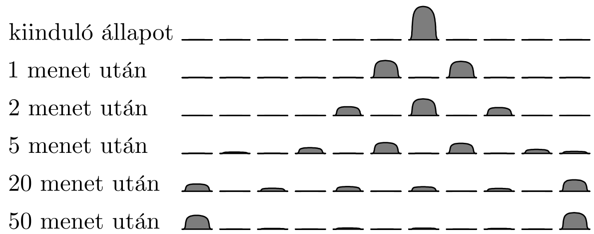
$$p(k,k+13) = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{k+13} - 1} < \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{k+13} - \left(\frac{19}{18}\right)^{13}} = \left(\frac{18}{19}\right)^{13} \approx 0{,}4952.$$

2. megoldás – invariánsokkal

Van egy $n+1$ mezőből álló ugróiskolapályánk, megszámozva 0-tól n-ig. A pályán 1 kg homokot fogunk ide-oda söprögetni; ez a homok lesz a „valószínűségi mezőnk” a mi „Markov-láncunkban”. A homokszemek jelentik a játék egy-egy lehetséges lefolyását. A homokszemek helye $0,1,2,\dots$ pörgetés után azt fogja jelenteni, hogy éppen hány egység pénzünk van. A 0-dik mezőn és az n-edik mezőn álló homokszemek azokat a játéklefolyásokat jelentik, amikor már elfogyott a pénzünk, illetve már sikerült elérni az n egység vagyont.

A játékot k egységgel kezdjük, ezért a kezdeti állapotban a teljes 1 kg homok a k-adik mezőn áll, a többi mező üres. Mi történik egy rulettpörgetéskor? Minden $m = 1,2,\dots,n-1$ esetén az m-edik mezőn álló homokkupacot kettéosztjuk: a kupac $\frac{18}{37}$ része „nyer”, ez átkerül az $(m+1)$-edik mezőre. A $\frac{19}{37}$ rész „veszít”, és az $(m-1)$-edik mezőre kerül át. Azok a homokszemek, amik a 0-dik vagy az n-edik mezőre kerülnek, ott is maradnak.

Ahogy repül az idő, egyre több homokszem kerül végső nyughelyére, a 0-dik vagy az n-edik mezőre. Mint láttuk, az 1., …, $(n-1)$-edik mezőkön levő kupacok mérete 0-hoz konvergál. A játék határeloszlásában $p(k,n)$ kg homok lesz az n-edik mezőn, és $1 - p(k,n)$ kg homok lesz a 0-dik mezőn.



A homok eloszlásának alakulása ($n = 10,\ k = 6$)

A homokkupacok méretéből kezdetben és minden pörgetés után is készítsünk egy-egy polinomot: ha a kupacok mérete $a_0, a_1, \ldots, a_n$, akkor a polinomunk $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. A kezdeti állapotban a polinom $f_0(x) = x^k$, a határesetben $f_\infty(x) = \big(1 - p(k,n)\big) + p(k,n)x^n$. Mikor egy pörgetésnél az m-edik kupacot kettéosztjuk, a következő csere történik:

$$x^m \quad \longmapsto \quad \frac{19}{37}x^{m-1} + \frac{18}{37}x^{m+1}.$$

A változás $\dfrac{19 - 37x + 18x^2}{37}x^{m-1}$; a lényeg, hogy többszöröse a $19 - 37x + 18x^2$ polinomnak. Ennek a polinomnak két gyöke van: az 1 és a $\dfrac{19}{18}$.

Hogy változik egy pörgetés során a polinom értéke az $x = 1$ helyen? Sehogy, mert $x = 1$ gyöke a $19 - 37x + 18x^2$ polinomnak. Tehát $f_{r+1}(1) = f_r(1)$; sőt ugyanez a határeloszlásra is igaz:

$$f_\infty(1) = f_0(1).$$

Persze ezt közvetlenül is megmondhattuk volna, mert a polinom értéke az $x = 1$ helyen a teljes homokmennyiség. Sokkal érdekesebb az $x = \dfrac{19}{18}$ helyen vett érték. Mivel $x = \dfrac{19}{18}$ a másik gyöke a $19 - 37x + 18x^2$ polinomnak, ez sem változik:

$$f_\infty\left(\frac{19}{18}\right) = f_0\left(\frac{19}{18}\right),$$

$$\big(1 - p(k,n)\big) + p(k,n) \cdot \left(\frac{19}{18}\right)^n = \left(\frac{19}{18}\right)^k.$$

Ebből $p(k,n)$-t kifejezhetjük:

$$p(k,n) = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n - 1}.$$

A várható lépésszámot a várható nyereményünkből fogjuk kiszámítani. A játék végén $p(k,n)$ valószínűséggel n egység pénzünk, illetve $1 - p(k,n)$ valószínűséggel 0 pénzünk lesz. Így a pénzünk várható értéke $p(k,n) \cdot n$, az összes nyereményünk várható értéke pedig $p(k,n) \cdot n - k$.

Másrészt, a várható $\ell(k,n)$ lépés mindegyikében $\dfrac{-1}{37}$ a várható nyereményünk, ez összesen $\ell(k,n) \cdot \dfrac{-1}{37}$. Tehát $p(k,n) \cdot n - k = \ell(k,n) \cdot \dfrac{-1}{37}$, rendezve

$$\ell(k,n) = 37\big(k - p(k,n) \cdot n\big).$$

Tanulság

Az az aprónak látszó előny, hogy a kaszinónak $\dfrac{1}{37}$-del nagyobb esélye van, mint nekünk, valójában tetemes. Épp csak 52 százalék esélyünk van arra, hogy (valamikor, életünkben egyszer) 12 egység pluszba kerüljünk; a plusz 50 egyszeri elérésére még végtelen nagy hitel esetén is kevesebb, mint 7 százalék. A kaszinó lassan, türelmesen, de 1 valószínűséggel megkopasztja a vendégeket – meglepő, hogy a rendőrségi beszámolóban szereplő banki „tanácsadó” ezt nem tudta.

Felhasznált irodalom

[K] *B. 4419. feladat.* KöMaL 2012. január.
http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4419&l=hu

[P] *Eljátszotta a bank pénzét.* Bács-Kiskun Megyei Rendőr-főkapitányság, 2017. jan. 7.
http://www.police.hu/hirek-es-informaciok/legfrissebb-hireink/bunugyek/eljatszotta-a-bank-penzet

[I] *Eljátszotta a bank pénzét: 58 milliót bukott egy kecskeméti férfi.* Index, 2017. jan. 7.
http://index.hu/gazdasag/2017/01/07/58_milliot_bukott_szerencsejatekon_egy_kecskemeti_bankfiok_dolgozoja/

[N] *Eljátszotta a bank pénzét egy alkalmazott.* Nők Lapja Café, 2017. jan. 7.
http://www.nlcafe.hu/ezvan/20170107/bank-penze-szerencsejatek-alkalmazott-eljatszotta/

[F] Keleti Tamás: *Tippjáték a rulettezésről.* Facebook, 2017. jan. 11.
https://www.facebook.com/tamas.keleti.79/posts/10154798837617435